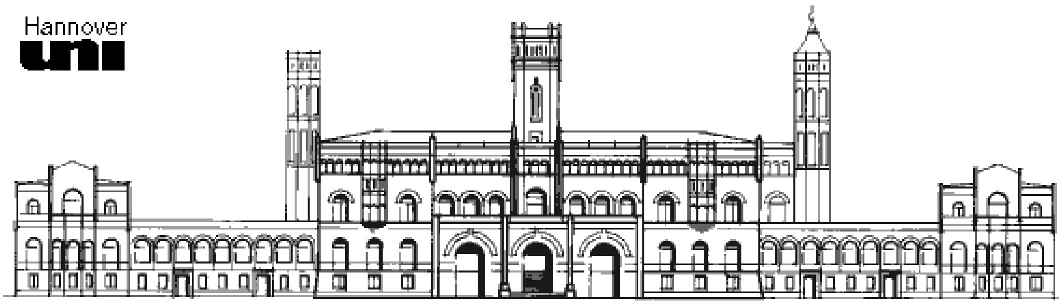


Vorlesungsmitschrift:
"Kombinatorik"

Prof. Dr. K.-P. Podewski
Institut für Mathematik, Hannover

(SS 97)

29. Oktober 1997

ge-TEX-ed von Sven Meyer
(email: `sm@stochastik.uni-hannover.de`)
(WWW: `www.stochastik.uni-hannover.de/~sm`)

Für diejenigen, die sich die Mühe machen, dieses Skript zu lesen und dabei auf Tippfehler stoßen: Bitte schickt mir, nachdem Ihr auf meiner Homepage nachgesehen und Euch vergewissert habt, daß dieser Fehler noch immer existiert, eine email, damit ich ihn berichtigen kann.

Mit bestem Dank, Sven.

Inhaltsverzeichnis

… und mit einem großen Dankeschön für die Mitarbeit an:

- Luise Regier (für das unermüdliche finden meiner Fehler)
- Christian Schweer
- Stephanie Sust

Kapitel 1

Elementare Kombinatorik

1.1 Rechenregeln

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_i,\ n \le i \le m$ eine Folge reeller Zahlen.

(1) $\displaystyle\sum_{i=n}^{m} a_i = \begin{cases} 0 & \text{für } m < n \\ \left(\displaystyle\sum_{i=n}^{m-1} a_i\right) + a_m & \text{sonst} \end{cases}$

(2) $\displaystyle\prod_{i=n}^{m} a_i = \begin{cases} 1 & \text{für } m < n \\ \left(\displaystyle\prod_{i=n}^{m-1} a_i\right) \cdot a_m & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel: $\prod\limits_{i=1}^{0} i = 1,\ \sum\limits_{i=1}^{0} i = 0.$

(3) $n! = \prod\limits_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (gesprochen: n-Fakultät)

(4) $a^n = \prod\limits_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}$

(5) Sei $0 \le k \le n$, dann ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Lemma 1

1. $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.
2. Ist $0 \le k \le n$, dann ist $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Beweis:

zu 1) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$

$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} = \binom{n}{n-i}.$

zu 2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!+n\cdot n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$ □

Pascal'sches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

1303 kannte der Chinese Chu Shik-Chieh bereits das "Pascal'sche" Dreieck

Lemma 2 $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$

Beweis: (vollständige Induktion über n)

IA: $(a+b)^0 = 1 = \sum\limits_{i=0}^{0} \binom{0}{i} a^{0-i} b^i.$

IS: $$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) &\overset{\text{IV}}{=} \left(\textstyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\right)(a+b) \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right] a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i \end{aligned}$$ □

Folgerung 3

(a) $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

(b) $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$

Beweis:

$2^n=(1+1)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}1^i=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$.

$0^n=(1-1)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}(-1)^i=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$. $\square$

1.2 Einfache Anzahlformeln

1. Sei M eine Menge und $n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$, dann hat M die Mächtigkeit n, wenn es ein $f: M \xrightarrow[\text{auf}]{1-1} \{i\in\mathbb{N}|i<n\}$ gibt (geschrieben $|M|=n$).
   Bemerkung: a) $|M|=0 \iff M=\emptyset$
   Beweis: "$\Leftarrow$": $M=\emptyset$, $\emptyset: M \xRightarrow[\text{auf}]{1-1} \{i\in\mathbb{N}|i<0\}=\emptyset$.
   "$\Rightarrow$": $M\neq\emptyset$, dann gibt es ein $a\in M$ mit $f(a)\in\{i\in\mathbb{N}|i<n\} \Rightarrow n>0 \Rightarrow |M|\neq 0$. $\square$
   b) $f: N \xrightarrow[\text{auf}]{1-1} M$, dann ist $|M|=|N|$.

2. Seien M,N Mengen mit $M\cap N=\emptyset$. Dann schreibt man für $M\cup N$ auch $M\uplus N$. Dann gilt $|M\uplus N|=|M|+|N|$.
   Bemerkung: Ist $a\in M$, dann $|M\setminus\{a\}|=|M|-1$.
   Dies benutzt man, um Beweise durch vollständige Induktion über $|M|$ zu führen.

3. Seien M,N Mengen. Dann ist $M\times N:=\{(a,b)|a\in M \text{ und } b\in N\}$

   Lemma 1 Ist $|M|=m$ und $|N|=n$, dann ist $|M\times N|=m\cdot n$.
   Beweis: (vollständige Induktion über $|M|$)
   IA: $|M|=0 \Rightarrow M=\emptyset \Rightarrow M\times N=\emptyset \Rightarrow |M\times N|=0=0\cdot n$.
   IS: $|M|=m+1$. Sei $a\in M$. Dann ist $|M\setminus\{a\}|=m$.
   $|M\times N|=|(M\setminus\{a\})\times N\uplus\{a\}\times N|=|(M\setminus\{a\})\times N|+|\{a\}\times N|=m\cdot n+n=(m+1)\cdot n$. $\square$

4. $\mathcal{P}(M)=\{A|A\subseteq M\}$

   Lemma 2 Ist $|M|=m$, dann ist $|\mathcal{P}(M)|=2^m$.
   Beweis: (vollständige Induktion über $|M|$)
   IA: Ist $|M|=0 \Rightarrow M=\emptyset$, $\mathcal{P}(M)=\{\emptyset\} \Rightarrow |\mathcal{P}(M)|=1=2^0$.
   IS: $|M|=m+1$: Sei $a\in M$. Dann ist $|M\setminus\{a\}|=m$.
   $\mathcal{P}(M)=\{A\subseteq M|a\notin A\}\cup\{A\subseteq M|a\in A\}=\mathcal{P}(M\setminus\{a\})\uplus\{A\cup\{a\}|A\in\mathcal{P}(M\setminus\{a\})\}$.
   $|\mathcal{P}(M)|\overset{\text{IV}}{=}2^m+2^m=2^{m+1}$. $\square$

5. Sei $k\leq|M|$. Dann sei $\mathcal{P}_k(M)=\{A\subset M|\ |A|=k\}$.

   Lemma 3 Ist $|M|=n$, dann ist $|\mathcal{P}_k(M)|=\binom{n}{k}$.
   Beweis: (Induktion über $|M|$)
   IA: $|M|=0 \Rightarrow M=\emptyset$ und $k=0$: $\mathcal{P}_0(\emptyset)=\{\emptyset\}$.
   $\Longrightarrow |\mathcal{P}_0(\emptyset)|=1=\binom{0}{0}$.
   IS: $|M|=n+1$
   Fall 1: $k=n+1$. $\mathcal{P}_k(M)=\{M\} \Rightarrow |\mathcal{P}_k(M)|=1=\binom{n+1}{n+1}$.
   Fall 2: Sei $a\in M$. Dann ist $|M\setminus\{a\}|=n$.
   $\mathcal{P}_k(M)=\{A|A\in\mathcal{P}_k(M),\ a\notin A\}\uplus\{A\cup\{a\}|A\in\mathcal{P}_{k-1}(M),\ a\notin A\}$
   $=\mathcal{P}_k(M\setminus\{a\})\uplus\{A\cup\{a\}|A\in\mathcal{P}_{k-1}(M\setminus\{a\})\}$
   $\Longrightarrow |\mathcal{P}_k(M)|=|\mathcal{P}_k(M\setminus\{a\})|+|\mathcal{P}_{k-1}(M\setminus\{a\})|\overset{\text{IV}}{=}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$. $\square$

   Beispiel 1: Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Lottoschein auszufüllen?

   Sei M die Zahlen 1 bis 49. Man kreuzt eine Teilmenge $A\subset M$ mit $|A|=6$ an.
   Die Anzahl der Teilmengen von M mit $|A|=6$ ist $|\mathcal{P}_6(M)|=\binom{49}{6}=13.983.816$.

   Beispiel 2: Sei M die Menge der Zahlen $1,\dots,m$. Man kreuzt r Zahlen an, wobei man eine Zahl mehrmals ankreuzen kann.
   Beh.: Es gibt $\binom{m+r-1}{r}$ viele Möglichkeiten, verschieden anzukreuzen.

   Beweis: $\mathfrak{F}$ die Menge aller Funktionen $f:\{i|i<r\}\to M$ mit $f(i)\leq f(i+1)$.
   Sei N die Menge der Zahlen 1 bis $m+r-1$ und $\mathfrak{G}$ die Menge der Funktionen $g:\{i|i<r\}\to N$ mit $g(i)<g(i+1)$. Dann ist $|\mathfrak{G}|=\binom{m+r-1}{r}$.
   Es genügt zu zeigen: $|\mathfrak{G}|=|\mathfrak{F}|$.

Sei $f \in \mathfrak{F}$. Dann sei $f^+ = \left\{ \begin{array}{rcl} \{i|i<r\} & \to & N \\ i & \mapsto & f(i)+i \end{array} \right.$. Es ist $f^+ \in \mathfrak{G}$ und f^+ ist injektiv.

Sei $g \in \mathfrak{G}$. Dann sei $g^- = \left\{ \begin{array}{rcl} \{i|i<r\} & \to & M \\ i & \mapsto & g(i)-i \end{array} \right.$. Es ist $g^- \in \mathfrak{F}$ und g^- ist injektiv.

$(f^+)^- = f$ und $(g^-)^+ = g$. □

6. Seien M und N Mengen. Dann sei $\mathfrak{F}(M,N) = \{f | f : M \overset{1-1}{\to} N\}$.

Lemma 4 Ist $|M| = m \leq n = |N|$, dann ist $|\mathfrak{F}(M,N)| = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Beweis: (Induktion über $|M|$)

IA: $|M| = 0 \Rightarrow M = \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{F}(M,N) = \{\emptyset\}$, also $|\mathfrak{F}(M,N)| = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$.

IS: Sei $a \in M,\ b \in N$.

Dann ist $|\{f \in \mathfrak{F}(M,N) \text{ mit } f(a) = b\}| = |\{\mathfrak{F}(M \setminus \{a\}, N \setminus \{b\})| \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(m-1))!} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!}$.

Es ist $\mathfrak{F}(M,N) = \biguplus_{b \in N} \{f \in \mathfrak{F}(M,N) | f(a) = b\}$

$\Longrightarrow |\mathfrak{F}(M,N)| = n \cdot |\mathfrak{F}(M \setminus \{a\}, N \setminus \{b\})| = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}$ □

Ist $M = N$, dann nennt man $\mathfrak{F}(M,M)$ auch die Menge der **Permutation**en von M.

Folgerung 5 Ist $|M| = n$, dann ist $|\mathfrak{F}(M,M)| = n!$.

1.3 Mächtigkeiten von Vereinigungen

Sei S eine Menge mit $|S| = r$ und seien $N_i,\ i \in S$, endliche Mengen. Wir wollen $|\bigcup_{i \in S} N_i|$ berechnen.

Beispiel 1: Sei $S = \{0,1\}$. Dann ist $|N_0 \cup N_1| = |N_0| + |N_1| - |N_0 \cap N_1|$.

Beispiel 2: Sei $S = \{0,1,2\}$. Damm ist $|N_0 \cup N_1 \cup N_2| = |N_0| + |N_1| + |N_2| - |N_0 \cap N_1| - |N_1 \cap N_2| - |N_0 \cap N_2| + |N_0 \cap N_1 \cap N_2|$.

Wir werden zeigen: $|\bigcup_{i \in S} N_i| = \sum_{t=1}^{r} (-1)^{t+1} \sum_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{i \in T} N_i|$.

Dazu setzen wir $N := \bigcup_{i \in S} N_i,\ W_t(N) := \sum_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{i \in T} N_i|$, also $|N| = \sum_{t=1}^{r} (-1)^{t+1} W_t(N)$.

Wir werden etwas mehr zeigen:

Sei $a \in N = \bigcup N_i$. Dann sei $S_a = \{i | a \in N_i\}$.

Sei $E_k = \{a |\ |S_a| = k\}$.

Dann ist $|N| = |\biguplus_{k=1}^{r} E_k| = \sum_{k=1}^{r} |E_k|$.

Satz 1 $|E_k| = \sum_{t=k}^{r} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} W_t(N)$.

Beweis: (Induktion über $|N|$)

IA: $|N| = 0 \Rightarrow N = \emptyset \Rightarrow N_i = \emptyset$, also sind beide Seiten 0.

IS: Sei $a \in N$.

Beh.: $W_t(N) = W_t(N \setminus \{a\}) + |\mathcal{P}_t(S_a)|$.

Bew.:$a \in \bigcap_{i \in T} N_i \Leftrightarrow T \subset S_a = \{i | a \in N_i\}$

Also ist $W_t(N) = \sum_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{i \in T} N_i| = \sum_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{i \in T} (N_i \setminus \{a\})| + |\mathcal{P}_t(S_a)| = W_t(N \setminus \{a\}) + |\mathcal{P}_t(S_a)|$. □

$|E_k \setminus \{a\}| \overset{\text{IV}}{=} \sum_{t=k}^{r} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} W_t(N \setminus \{a\}) = \sum_{t=k}^{r} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} W_t(N) - \sum_{t=k}^{r} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} |\mathcal{P}_t(S_a)|$

1. Fall: $|S_a| < k \Rightarrow |E_k \setminus \{a\}| = |E_k|$ und $|\mathcal{P}_t(S_a)| = 0$ für $t \geq k$.

2. Fall: $|S_a| = k \Rightarrow |E_k \setminus \{a\}| = |E_k| - 1$. Es ist $|\mathcal{P}_t(S_a)| = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } t = k \\ 0 & \text{sonst (für } t > k) \end{array} \right.$

Also gilt die Induktionsbehauptung.

3. Fall: $|S_a| = l > k$. Dann ist $|E_k \setminus \{a\}| = |E_k|$.

Es ist z.z.: $\sum_{t=k}^{r} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} |\mathcal{P}_t(S_a)| = 0$.

Es ist $|\mathcal{P}_t(S_a)| = \left\{ \begin{array}{ll} \binom{l}{t} & \text{für } k \leq t \leq l \\ 0 & \text{sonst (für } t > l) \end{array} \right. \quad \Rightarrow S := \sum_{t=k}^{l} (-1)^{t-k} \binom{t}{k} \binom{l}{t}$.

Beh.: $\binom{t}{k}\binom{l}{t} = \binom{l}{k}\binom{l-k}{l-t}$.

Bew.: $\binom{t}{k}\binom{l}{t} = \frac{t!}{k!(t-k)!} \frac{l!}{t!(l-t)!} = \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{(l-k)!}{(t-k)!(l-t)!} = \binom{l}{k} \frac{(l-k)!}{(l-t)!(l-k-(l-t))!} = \binom{l}{k}\binom{l-k}{l-t}$. □

$\Longrightarrow S = \sum_{t=k}^{l} (-1)^{t-k} \binom{l}{k}\binom{l-k}{l-t} = \binom{l}{k} \sum_{t=k}^{l} (-1)^{t-k} \binom{l-k}{l-t} = \binom{l}{k} \sum_{i=0}^{l-k} (-1)^i \binom{l-k}{i} = \binom{l}{k} (1-1)^{l-k} = 0$. □

Folgerung 2 $|N| = \sum_{t=1}^{r} (-1)^{t+1} W_t(N)$.

Beweis: $|N| = \left|\biguplus_{k=1}^{r} E_k\right| = \sum_{k=1}^{r} |E_k| = \sum_{k=1}^{r}\sum_{t=k}^{r}(-1)^{t-k}\binom{t}{k}W_t(N) = \sum_{t=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}(-1)^{t-k}\binom{t}{k}W_t(N) =$

$= \sum_{t=1}^{r}(-1)^t W_t(N)\sum_{k=1}^{t}(-1)^k\binom{t}{k}.$

$0 = \sum_{k=0}^{t}(-1)^k\binom{t}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{t}(-1)^k\binom{t}{k}$, also ist $|N| = \sum_{t=1}^{r}(-1)^{t+1}W_t(N)$. □

Folgerung 3 (Siebformel)

Sei M eine Menge und $N_i \subseteq M$ für $i \in S$, dann ist $|M \setminus \bigcup_{i\in S} N_i| = |M| + \sum_{t=1}^{r}(-1)^t W_t(N)$.

Beispiel: Sei $M = \{1, 2, \dots, 50\}$ und sei $S = \{2, 3, 5\}$. Wieviele Zahlen aus M sind nicht durch 2,3 oder 5 teilbar?

$N_p := \{k \in M|\ p|k\},\ p \in S$.

Gesucht ist $|M \setminus \bigcup_{p\in S} N_p| = |M| + \sum_{t=1}^{3}(-1)^t W_t(N)$ mit $W_t(N) = \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{p\in T} N_p|$.

$|N_2| = 25,\ |N_3| = 16,\ |N_5| = 10$

$W_1(N) = |N_2| + |N_3| + |N_5| = 51$

$W_2(N) = |N_2 \cap N_3| + |N_3 \cap N_5| + |N_2 \cap N_5| = 8 + 3 + 5 = 16$

$W_3(N) = |N_2 \cap N_3 \cap N_5| = 1$

$\Longrightarrow\ |M \setminus \bigcup_{p\in S} N_p| = 50 - 51 + 16 - 1 = 14$

Explizit: $M \setminus \bigcup_{p\in S} N_p = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49\}$

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und sei $M = \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\varphi(n) = |\{k \in M|ggT(k, n) = 1\}|$ die **φ-Funktion**. Wir wollen $\varphi(n)$ berechnen. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Sei $S = \{p \in \mathbb{P}|\ p|n\}$.

Satz 4 $\varphi(n) = n\prod_{p\in S}(1 - \frac{1}{p})$.

Beweis: Sei $p \in S$, dann sei $N_p = \{k \in M|\ p|k\},\ |N_p| = \frac{n}{p}$.

Dann ist für $k \in M$: $\quad ggT(k, n) = 1 \iff k \notin \bigcup_{p\in S} N_p$.

Also ist $\varphi(n) = |M \setminus \bigcup_{p\in S} N_p| = n + \sum_{t=1}^{|S|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{p\in T} N_p|$.

Es ist $|\bigcap_{p\in T} N_p| = \frac{n}{\prod_{t\in T} t} =: \frac{n}{\prod T} \implies \varphi(n) = n + \sum_{t=1}^{|S|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} \frac{n}{\prod T}$

$\varphi(n) = n\left(\sum_{t=0}^{|S|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} \frac{1}{\prod T}\right)$.

Es genügt zu zeigen: $\prod_{p\in S}(1 - \frac{1}{p}) = \sum_{t=0}^{|S|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} \frac{1}{\prod T}$

Beweis: (Induktion über $|S| = r$)

IA: Ist $|S| = 0$, dann sind beide Seiten gleich Eins.

IS: Ist $|S| \neq 0$, dann sei $q \in S$.

$\sum_{t=0}^{|S|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S)} \frac{1}{\prod T} = \sum_{t=0}^{|S|}(-1)^t \sum_{\substack{T\in\mathcal{P}_t(S)\\ q\notin T}} \frac{1}{\prod T} + \sum_{t=1}^{|S|}(-1)^t \sum_{\substack{T\in\mathcal{P}_t(S)\\ q\in T}} \frac{1}{\prod T} =$

$\sum_{t=0}^{|S\setminus\{q\}|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S\setminus\{q\})} \frac{1}{\prod T} - \frac{1}{q}\sum_{t=0}^{|S\setminus\{q\}|}(-1)^t \sum_{T\in\mathcal{P}_t(S\setminus\{q\})} \frac{1}{\prod T} \overset{\text{IV}}{=} \prod_{p\in S\setminus\{q\}}(1 - \frac{1}{p}) - \frac{1}{q}\prod_{p\in S\setminus\{q\}}(1 - \frac{1}{p}) =$

$\left(\prod_{p\in S\setminus\{q\}}(1 - \frac{1}{p})\right)(1 - \frac{1}{q}) = \prod_{p\in S}(1 - \frac{1}{p})$. □

1.4 Mengen von Permutationen

Sei $M = \{i|i < n\}$. Wir hatten gesetzt $\mathfrak{F}(M, M) = \{f|f : M \xrightarrow[\text{auf}]{1-1} M\}$ und gezeigt: $|\mathfrak{F}(M, M)| = n!$

$f \in \mathfrak{F}(M, M)$ heißt **fixpunktfrei**, wenn $f(i) \neq i$ für $i < n$.

Lemma 1 Sei $M = \{i|i < n\}$. Dann ist $r(n) = |\{f \in \mathfrak{F}(M, M)|f \text{ ist fixpunktfrei}\}| = n!\sum_{t=0}^{n}(-1)^t\frac{1}{t!}$.

Beweis: Sei $i \in M$. Dann sei $N_i = \{f \in \mathfrak{F}(M,M) | f(i) = i\}$.

Sei $N = \bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$. Dann ist $r(n) = |\mathfrak{F}(M,M) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} N_i| = n! - |N|$.

Wir wollen $|N|$ bestimmen: $|N| = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} W_t(N)$ mit $W_t(N) = \sum_{T \in \mathcal{P}_t(M)} |\bigcap_{i \in T} N_i|$.

Sei $T \in \mathcal{P}_t(M)$. Dann ist $\bigcap_{i \in T} N_i = \{f \in \mathfrak{F}(M,M) | f(i) = i \text{ für } i \in T\}$, also ist $|\bigcap_{i \in T} N_i| = |\mathfrak{F}(M \setminus T, M \setminus T)| =$
$= (n - |T|)!$.

Also ist für $1 \leq t \leq n:$ $W_t(N) = \sum_{T \in \mathcal{P}_t(M)} |\bigcap_{i \in T} N_i| = |\mathcal{P}_t(M)| \cdot (n - |T|)! = \binom{n}{t}(n - |T|)! = \frac{n!}{t!}$.

Somit ist $|N| = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} \frac{n!}{t!}$, $r(n) = n! - |N| = n! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t \frac{n!}{t!} = n! \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}$. $\square$

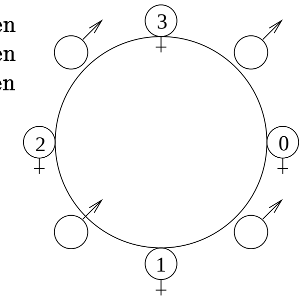
Wieviele fixpunktfreie Permutationen von $\emptyset$ gibt es?

$r(0) = 0! \sum_{t=0}^{0} (-1)^t \frac{1}{t!} = 1$.

Beispiel: Es wurden n Briefe geschrieben und n Kuverts beschriftet. Die Anzahl der Möglichkeiten, jeden Brief in ein Kuvert zu stecken ist $n!$. Die Anzahl der Möglichkeiten, daß kein Brief im richtigen Umschlag ist, ist $r(n) = n! \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}$.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Affe jeden Brief in einen falschen Umschlag steckt: $\frac{r(n)}{n!} = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}$, also für großes n ungefähr $e^{-1} \approx 0.36787944$.

Beispiel: Gegeben sei ein runder Tisch mit $2n$ Stühlen und n vielen Ehepaaren. Die Damen nehmen zunächst am Tisch Platz, wobei jeweils ein Stuhl frei bleibt. Jede Dame wählt einen Tischherren, der auf ihrer rechten Seite Platz nehmen soll. Dabei ist es verboten, den eigenen Ehemann zum Tischherrn zu wählen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

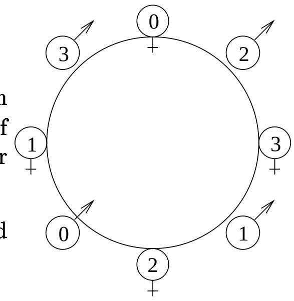


Man numeriert die Damen durch und bezeichnet den Ehemann von $\mathbb{F}_i$ mit $\mathbb{M}_i$.

Gesucht ist $a_n = |\{f | f : \{\mathbb{F}_i | i < n\} \to \{\mathbb{M}_i | i < n\} \text{ mit } f(\mathbb{F}_i) \neq \mathbb{M}_i \text{ für } i < n\}| =$
$= |\{f | f : \{i | i < n\} \to \{i | i < n\} \text{ mit } f(i) \neq i \text{ für } i < n\}| =$
$\overset{\text{Lemma}}{\underset{1}{=}} n! \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}$.

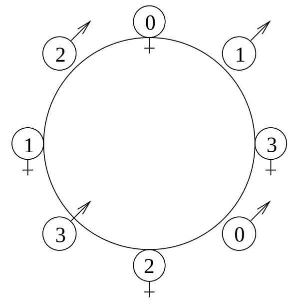
Das Ménage-Problem

Gegeben sei ein runder Tisch mit $2n$ Stühlen und n vielen Ehepaaren. Die Damen nehmen Platz, wobei sie jeweils einen Stuhl frei lassen. Jede Dame wählt einen Tischherrn, der auf ihrer rechten Seite sitzen soll. Dabei ist es verboten, daß der eigene Ehemann Tischnachbar wird.



Man numeriert die Damen gegen den Uhrzeigersinn durch. Der Ehemann der Dame $\mathbb{F}_i$ wird mit $\mathbb{M}_i$ bezeichnet.

Gesucht ist $u(n) = |\{f | f : \{\mathbb{F}_i | i < n\} \xrightarrow{1-1} \{\mathbb{M}_i | i < n\} \text{ mit } f(\mathbb{F}_i) \neq \mathbb{M}_i \text{ für } i < n,$
$f(\mathbb{F}_i) \neq \mathbb{M}_{i+1} \text{ für } i < n-1,\ f(\mathbb{F}_{n-1}) \neq \mathbb{M}_0\}|$



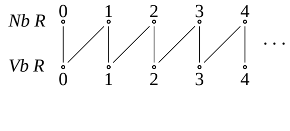
Beispiel: $n = 4 \implies u(4) = 2$:

$f(\mathbb{F}_0) \notin \{\mathbb{M}_0, \mathbb{M}_1\}$

1. Fall: $f(\mathbb{F}_0) = \mathbb{M}_3$
$\Rightarrow f(\mathbb{F}_1) = \mathbb{M}_0 \Rightarrow f(\mathbb{F}_2) = \mathbb{M}_1 \Rightarrow f(\mathbb{F}_3) = \mathbb{M}_2$

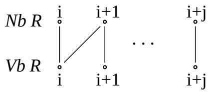
2. Fall: $f(\mathbb{F}_0) = \mathbb{M}_2$
$\Rightarrow f(\mathbb{F}_3) = \mathbb{M}_1 \Rightarrow f(\mathbb{F}_2) = \mathbb{M}_0 \Rightarrow f(\mathbb{F}_1) = \mathbb{M}_3$

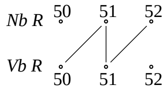
Einige Begriffe aus der naiven Mengenlehre



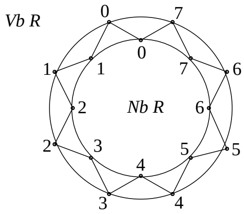
1. a) Eine **Relation** ist eine Menge von geordneten Paaren.
$Vb\ R := \{a | (a,b) \in R\}$, $Nb\ R := \{b | (a,b) \in R\}$ sind **Vorbereich** und **Nachbereich** einer Relation.
Beispiele: $R = \{(i,i) | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(i, i+1) | i \in \mathbb{N}\}$. $Vb\ R = Nb\ R = \mathbb{N}$.
b) Seien $k, l \in \mathbb{N}$, dann sei $S = \{(i,j) \in R | k \leq i + j < k + l\}$. Wir wollen S eine **Kette** der Länge l nennen.

Beispiel: $k = 2i,\ l = 2j+1$ $\qquad$ $k = 101,\ l = 3$





c) Sei $n \geq 2$, dann sei $S = \{(i,j) \in R | 0 \leq i+j < 2n-1\} \cup \{(n-1,0)\}$.
Wir werden S einen **Kreis** der Länge $2n$ nennen.

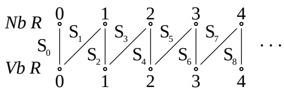


n=8: Ein Kreis der Länge 16.

2. Eine Relation f heißt **Funktion**, wenn für alle $(a,b) \in f$ und $(a,c) \in f \implies b = c$
Statt $(a,b) \in f$ schreibt man auch $f(a) = b$.
Beispiel: $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \{i | i < n\} & \to & \{i | i < n\} \\ i & \mapsto & i \end{array} \right.$. Dann ist $f = \{(i,i) | i < n\}$.

3. Eine Funktion f heißt **injektiv**, wenn für alle $(a,b) \in f$ und $(c,b) \in f \implies a = c$.
Beispiel: $F = \{(i,i) | i < n\}$ ist injektiv.

4. Eine Relation T heißt **bijektiv**, wenn T eine injektive Funktion ist. Dann ist $T : Vb\ T \underset{\textbf{auf}}{\overset{1-1}{\to}} Nb\ T$. Beispiele:
a) Ist f eine injektive Funktion und $T \subseteq f$, dann ist T bijektiv.
b) $R = \{(i,i) | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(i,i+1) | i \in \mathbb{N}\}$. Sei $T \subseteq R$. Wann ist T bijektiv?



Sei $S_{i+j} = (i,j),\ S_{-1} = (0,2)$

$T \subseteq R$ ist bijektiv $\iff \forall\ S_k \in T \implies S_{k-1} \notin T,\ S_{k+1} \notin T$

Fortsetzung **des Ménage-Problems**:
Sei $M = \{i | i < n\}$ und sei $S = \{(i,j) \in R | 0 \leq i+j < 2n-1\} \cup \{(n-1,0)\} = \{(i,i) | i < n\} \cup \{(i,i+1) | i < n-1\} \cup \{(n-1,0)\}$ der Kreis der Länge $2n$.

$u(n) = |\{f | f : \{\mathbb{F}_i | i < n\} \overset{1-1}{\to} \{\mathbb{M}_i | i < n\}$ mit $f(\mathbb{F}_i) \neq \mathbb{M}_i$ für $i < n,\ f(\mathbb{F}_i) \neq \mathbb{M}_{i+1}$ für $i < n-1$ und $f(\mathbb{F}_{n-1}) \neq \mathbb{M}_0\}| =$
$= |\{f \in \mathfrak{F}(M,M) | f(i) \neq i$ für $i < n,\ f(i) \neq i+1$ für $i < n-1$ und $f(n-1) \neq 0\}| =$
$= |\{f \in \mathfrak{F}(M,M) | s \notin f$ für $s \in S\}|$

Wir setzen $b(n,t) = |\{T \subseteq S |\ |T| = t$ und T bijektiv$\}|$.

Lemma 2 $u(n) = \sum\limits_{t=0}^{n} (-1)^t b(n,t)(n-t)!$ für $n \geq 2$.

Beweis: Sei $s \in S$, $N_s := \{f \in \mathfrak{F}(M,M) | s \in f\}$. Sei $N = \bigcup\limits_{s \in S} N_s$.

Dann ist $u(n) = |\{f \in \mathfrak{F}(M,M)\} \setminus N| = n! - |N|$.
Wir wollen $|N|$ ausrechnen:

$$|N| = \sum_{t=1}^{2n} (-1)^{t+1} W_t(N) \text{ mit } W_t(N) = \sum_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap_{s \in T} N_s|$$

Sei $T \subseteq S$ mit $|T| = t$. $|\bigcap\limits_{s \in T} N_s| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } T \text{ nicht bijektiv} \\ |\mathfrak{F}(M \setminus Vb\ T, M \setminus Nb\ T)| = (n-t)! & \text{sonst} \end{array} \right.$

Also ist $W_t(N) = \sum\limits_{T \in \mathcal{P}_t(S)} |\bigcap\limits_{s \in T} N_s| = \sum\limits_{\substack{T \in \mathcal{P}_t(S) \\ T \text{ bijektiv}}} (n-t)! = b(n,t)(n-t)!$

Also $|N| = \sum\limits_{t=1}^{2n} (-1)^{t+1} b(n,t)(n-t)!$, $u(n) = n! + \sum\limits_{t=1}^{2n} (-1)^t b(n,t)(n-t)!$.

- $b(n,0) = |\{T \subseteq S |\ |T| = 0$ und T bijektiv$\}| = |\{\emptyset\}| = 1$.
- Sei $t > n$. Da $Vb\ T \subseteq \{i | i < n\} \implies b(n,t) = 0$
(es gibt keine $> n$ elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge)

Also ist $u(n) = \sum\limits_{t=0}^{n} (-1)^t b(n,t)(n-t)!$ $\qquad\square$

Lemma 3 Sei $k, l \in \mathbb{N}$. Sei $S = \{(i,i)|k \le 2i < k+l\} \cup \{(i,i+1)|k \le 2i+1 < k+l\}$ und sei $S(t) = \{T \subseteq S|\ |T| = t \text{ und } T \text{ bijektiv}\}$. Dann ist $|S(t)| = \binom{l-t+1}{t}$.
Beweis: (Induktion über l)

$$l = 0 \implies S = \emptyset \quad |S(t)| = \begin{cases} |\{\emptyset\}| = 1 & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \implies |S(t)| = \binom{l-t+1}{t}$$

Ist $l = 1$, dann ist $|S| = 1$. Also ist $|S(t)| = \begin{cases} |\{\emptyset\}| = 1 & t = 0 \\ |S| = 1 & t = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \implies |S(t)| = \binom{l-t+1}{t}$

Induktionsschritt ($l \ge 2$)

Seien $s_j = \begin{cases} (i,i) & \text{für } j = 2i \\ (i,i+1) & \text{für } j = 2i+1 \end{cases} \implies S = \{s_j | k \le j < k+l\}$.

Dann ist $S' = S \setminus \{s_k\}$ eine Kette der Länge $l-1$ und $S'' = S \setminus \{s_k, s_{k+1}\}$ eine Kette der Länge $l-2$.

Beh.: 1. $|\{T \in S(t)|s_k \notin T\}| = |S'(t)|$

2. $|\{T \in S(t)|s_k \in T\}| = |S''(t-1)|$

Bew. zu 2):

Sei $T \in S(t)$ mit $s_k \in T$.

Da T bijektiv $\implies s_{k+1} \notin T \implies T \setminus \{s_k\} \in S''(t-1)$.

Sei umgekehrt $T' \in S''(t-1) \implies s_{k+1} \notin T' \implies T' \cup \{s_k\}$ bijektiv $\implies T' \cup \{s_k\} \in S(t)$.

Also ist $|S(t)| = |S'(t)| + |S''(t-1)| \overset{\text{IV}}{=} \binom{(l-1)-t+1}{t} + \binom{(l-2)-(t-1)+1}{t-1} = \binom{l-t}{t} + \binom{l-t}{t-1} = \binom{l-t+1}{t}$. □

Lemma 4 $b(n,t) = \frac{2n}{2n-t}\binom{2n-t}{t}$ für $n \ge 2$ und $t < 2n$.
Beweis: $S : \{(i,i)|i < n\} \cup \{(i,i+1)|i < n-1\} \cup \{(n-1,0)\} = \{s_j | 0 \le j < 2n-1\} \cup \{(n-1,0)\}$.

Dann ist $S' = \{s_j | 0 \le j < 2n-1\}$ eine Kette der Länge $2n-1$ und $S'' = S' \setminus \{s_0, s_{2(n-1)}\}$ eine Kette der Länge $2n-2$.

Sei $B(n,t) = \{T \subseteq S|\ |T| = t \text{ und } T \text{ bijektiv}\}$.

Dann gilt: 1. $|\{T \subseteq S|(n-1,0) \notin T\}| = |S'(t)|$.

2. $|\{T \subseteq S|(n-1,0) \in T\}| = |S''(t-1)|$.

Bew. zu 2) Sei $T \subseteq S$ mit $(n-1,0) \in T \implies s_0, s_{2n-1} \notin T \implies T \setminus \{(n-1,0)\} \in S''(t-1)$.

Ist umgekehrt $T' \in S''(t-1) \implies s_0, s_{2n-1} \notin T' \implies T' \cup \{(n-1,0)\} \in S(t)$.

Also $b(n,t) = |B(n,t)| = |S'(t)| + |S''(t-1)| \overset{\text{Lemma 3}}{=} \binom{2n-1-t+1}{t} + \binom{2n-3-(t-1)+1}{t-1} = \ldots = \frac{2n}{2n-t}\binom{2n-t}{t}$. □

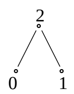
1.5 Injektive Auswahlfunktionen

Sei I eine Menge. Eine Funktion $(F(i)|i \in I)$ heißt Familie.
Die Frage lautet:
Gibt es eine injektive Funktion f mit $Vb\ f = I$ und $f(i) \in F(i)$? Eine solche Funktion nennt man **injektive Auswahlfunktion**.

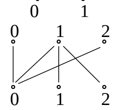
Anschaulich: Sei I eine Menge von Herren, $F(i)$ die Menge der Damen, die i kennt. Kann jeder Herr eine Dame seiner Bekanntschaft heiraten? Deswegen wird f auch kürzer **Hochzeit** genannt.

Beispiele:

$F(0) = \{2\}$
$F(1) = \{2\}$



$F(0) = \{0,1,2\}$
$F(1) = \{1\}$
$F(2) = \{1\}$



Wir setzen für $J \subseteq I \quad F(J) = \bigcup_{i \in J} F(i)$

Ist f eine Hochzeit von F und ist $J \subseteq I \implies f[J] = \{f(i)|i \in J\} \subseteq F(J) \overset{f \text{ inj.}}{\implies} |J| = |f[J]| \le |F(J)|$.

Die **Hall-Bedingung** lautet: Für alle $J \subseteq I$ ist $|J| \le |F(J)|$.
Wir haben gezeigt: Besitzt F eine injektive Auswahlfunktion, dann ist die Hall-Bedingung erfüllt.
Beispiel 1: $|I| = |\{0,1\}| = 2 > 1 = |\{1\}| = |F(I)|$
Beispiel 2: $J = \{1,2\}$: $F(J) = \{1\} \implies |J| > |F(J)|$

Wir wollen nun zeigen: Erfüllt F die Hall-Bedingung, dann besitzt F eine injektive Auswahlfunktion.

Lemma 1 Erfüllt F die Hall-Bedingung und ist $K \subseteq I$ mit $|F(K)| = |K|$, dann erfüllt $F' = (F(i) \setminus F(K)|i \in I \setminus K)$ die Hall-Bedingung.
Beweis: Sei $J \subseteq I \setminus K$. Da F die Hall-Bedingung erfüllt, ist $|F(J \cup K)| \ge |J \cup K| \implies |F'(J)| = |F(J) \setminus F(K)| = |F(J \cup K) \setminus F(K)| = |F(J \cup K)| - |F(K)| \ge |J \cup K| - |K| = |(J \cup K) \setminus K| = |J|$. □

Satz 2 (Satz von Hall)
Ist F endlich und erfüllt F die Hall-Bedingung, dann besitzt F eine injektive Auswahlfunktion.
Beweis: (Indunktion über $|F|$)
Ist $F = \emptyset$, dann ist $\emptyset$ eine injektive Auswahlfunktion.
Sei $|F| > 0$ und $i \in I$. Da F die Hall-Bedingung erfüllt, ist $F(i) \neq \emptyset$. Sei $a \in F(i)$.
1. Fall: Für alle $K \subseteq I \setminus \{i\}$ mit $a \in F(K)$ ist $|F(K)| > |K|$.
Dann gilt für alle $K \subseteq I \setminus \{i\}: \ |F'(K)| = |F(K) \setminus \{a\}| \geq |K|$.
Da $|F'| < |F|$ und die Hall-Bedingung erfüllt ist, besitzt F' eine injektive Auswahlfunktion.
Dann ist $f = f' \cup \{(i,a)\}$ eine injektive Auswahlfunktion.
2. Fall: sonst
Sei $K \subseteq I \setminus \{i\}$ mit $a \in F(K)$ und $|F(K)| = |K|$.
Sei $F' = (F(i)|i \in K)$. Dann erfüllt F' die Hall-Bedingung und $|F'| < |F| \stackrel{\text{IV}}{\Longrightarrow} F'$ besitzt eine injektive Auswahlfunktion f'.
Sei $F'' = (F(i) \setminus F(K)|i \in I \setminus K)$. Nach Lemma 1 erfüllt F'' die Hall-Bedingung und $|F''| < |F|$ (da $K \neq \emptyset$) $\stackrel{\text{IV}}{\Longrightarrow} F''$ besitzt eine injektive Auswahlfunktion f''.
Dann ist $f = f' \cup f''$ eine injektive Auswahlfunktion von F. □

Sei $F^{-1}(a) = \{i|a \in F(i)\}$. $F^{-1}(a)$ ist die Menge der Herren, die die Dame a kennen.

Folgerung 3 Sei F eine endliche Familie und $k > 0$. Gilt für alle $i \in I$ und $a \in F(i)$ $|F(i)| = k, \ |F^{-1}(a)| = k$, dann besitzt F eine injektive Auswahlfunktion.
Beweis: Sei $J \subseteq I$. Wir wollen zeigen: $|F(J)| \geq |J|$.
Sei $P_1 = \{(i,a)|i \in J, a \in F(i)\}, \ P_2 = \{(i,a)|a \in F(i), \ a \in F(J)\}$.
Dann ist $|P_1| \leq |P_2|$.
$|P_1| = |\biguplus_{i \in J} \{(i,a)|a \in F(i)\}| = \sum_{i \in J} |\{(i,a)|a \in F(i)\}| = \sum_{i \in J} |F(i)| = |J| \cdot k$.
$|P_2| = |\biguplus_{a \in F(J)} \{(i,a)|a \in F(i)\}| = \sum_{a \in F(J)} |\{(i,a)|a \in F(i)\}| = \sum_{a \in F(J)} |\{i|a \in F(i)\}| = \sum_{a \in F(J)} |F^{-1}(a)| = |F(J)| \cdot k$.
$\Longrightarrow \ |F(J)| \cdot k = |P_2| \geq |P_1| = |J| \cdot k \iff |F(J)| \geq |J|$ □

Sei N eine Menge. Wir nennen eine Menge von Permutationen Σ **lateinisch**, wenn gilt:
Zu jedem $(i,a) \in N \times N$ gibt es höchstens eine Permutation $\sigma \in \Sigma$ mit $(i,a) \in \sigma$.

	1	2	...	i	...	j	...	k	...	n
σ_1						n				
σ_2				n						
σ_3								n		
$\vdots$										
σ_n										

$\emptyset$ ist lateinisch.

Folgerung 4
Ist $|N| = n$ und ist Σ lateinisch mit $|\Sigma| < n$, dann gibt es eine Permutation $\rho \notin \Sigma$ mit $\Sigma \cup \{\rho\}$ ist lateinisch.
Beweis: $F(i) = \{a|(i,a) \notin \bigcup \Sigma\}$[1]. Da Σ lateinisch ist, ist $|F(i)| = n - |\Sigma|$.
$|F^{-1}(a)| = |N \setminus \{i|(i,a) \in \bigcup \Sigma\}| = n - |\Sigma|$.
Also ist $|F(i)| = |F^{-1}(a)| = n - |\Sigma|$, also existiert eine injektive Auswahlfunktion ρ von $(F(i)|i \in I)$.
Dann ist $\Sigma \cup \{\rho\}$ lateinisch. □

1.6 Hall-Familien

Wir nennen eine Familie $(H(i)|i \in I)$ **Hall-Familie**, wenn $H(i)$ endlich ist für jedes $i \in I$.
Wir sagen, daß H die Hall-Bedingung erfüllt, wenn für jedes $J \subset\subset I$ (J ist endliche Teilmenge von I) gilt: $|H(J)| \geq |J|$.

Satz 1 (Hall jun.)
Erfüllt eine Hall-Familie H die Hall-Bedingung, dann besitzt H eine injektive Auswahlfunktion.
Beweis: Sei $J \subseteq I$ und f eine Hochzeit von $H \upharpoonright J$.
Wir nennen f zulässig, wenn $H_f = (H(i) \setminus Nb\ f|i \in I \setminus Vb\ f)$ die Hall-Bedingung erfüllt.
$\emptyset$ ist zulässig, da H die Hall-Bedingung erfüllt.
Beh.: Ist $\mathfrak{F}$ eine Kette von zulässigen Funktionen bzgl. $\subseteq$, dann ist $f = \bigcup \mathfrak{F}$ eine zulässige Funktion.
Bew.: Sei $J \subset\subset I \setminus Vb\ f$. Dann ist $H_f(J) = H(J) \setminus Nb\ f$.
$H(J)$ ist endlich und $\mathfrak{F}$ ist eine Kette, also gibt es ein $g \in \mathfrak{F}$ mit $H(J) \setminus Nb\ f = H(J) \setminus Nb\ g$.

[1] $\bigcup \Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \{(i,a)|(i,a) \in \sigma\}$

Da H_g die Hall-Bedingung erfüllt, ist $|H_f(J)| = |H(J) \setminus Nb\ f| = |H(J) \setminus Nb\ g| = |H_g(J)| \geq |J|$.
Also erfüllt H_f die Hall-Bedingung und ist somit zulässig. Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale (bzgl. $\subseteq$) zulässige Funktion f.

Beh.: Ist $K \subset\subset I \setminus Vb\ f$ mit $|H_f(K)| = |K|$, dann ist $K = \emptyset$.

Bew.: Da H_f die Hall-Bedingung erfüllt, besitzt $H_f \upharpoonright K$ eine injektive Auswahlfunktion g.
Dann ist $g[K] = H_f(K)$.
Sei $h = g \cup f$ eine injektive Auswahlfunktion von $H \upharpoonright (Vb\ f \cup K)$.
$H_h = (H(i) \setminus Nb\ h | i \in I \setminus Vb\ h) = (H_f(i) \setminus H_f(K) | i \in (I \setminus Vb\ f) \setminus K)$
Da H_f die Hall-Bedingung erfüllt, folgt aus Lemma 1, daß H_h die Hall-Bedingung erfüllt, also ist $h \supseteq f$ zulässig.
Da f maximal, folgt $h = f \implies K = \emptyset$.

Beh.: $Vb\ f = I$.

Bew.: Angenommen, es gibt $i \in I \setminus Vb\ f$.
Da H_f die Hall-Bedingung erfüllt, ist $H_f(i) \neq \emptyset$. Sei $a \in H_f(i)$.
Sei $h = f \cup \{(i, a)\}$. Dann ist h eine injektive Auswahlfunktion von $H \upharpoonright (Vb\ f \cup \{i\})$.
Wir erhalten einen Widerspruch, wenn H_h die Hall-Bedingung erfüllt (da dann h zulässig, aber f maximal!)
Sei $\emptyset \neq J \subseteq I \setminus Vb\ h$. Dann ist $|H_f(J)| > |J|$ nach der vorherigen Behauptung.
Also ist $|H_h(J)| = |H_f(J) \setminus \{a\}| \geq |J|$. □

Folgerung 2 (Kompaktheitssatz)

Sei H eine Hall-Familie. Dann sind äquivalent:
1) H besitzt eine injektive Auswahlfunktion.
2) H erfüllt die Hall-Bedingung.
2) Für jedes $J \subset\subset I$ besitzt $H \upharpoonright J$ eine injektive Auswahlfunktion.

Sei F eine Familie. $K \subseteq I$ heißt **kritisch**, wenn gilt:
1. $F \upharpoonright K$ besitzt eine injektive Auswahlfunktion.
2. Für alle Hochzeiten f von $F \upharpoonright K$ ist $Nbf = F(K)$.

Ist H eine Hall-Familie und $K \subseteq I$, dann sind äquivalent.:
1. K ist kritisch in H.
2. $H \upharpoonright K$ erfüllt die Hall-Bedingung und $|H(K)| = |K|$.

Folgerung 3 (Kleinstes Gegenbeispiel)

Sei $H = (H(i) | i \in I)$ eine Hall-Familie. Dann sind äquivalent:
1. H besitzt keine Hochzeit.
2. Es gibt ein $K \subset\subset I$, K kritisch und $i \in I \setminus K$ mit $H(i) \subseteq H(K)$.

Beweis: $2 \implies 1$: $\surd$.
$1 \implies 2$:Da H keine Hochzeit besitzt, gibt es ein $L \subset\subset I$ mit $|H(L)| < |L|$.
Sei L so gewählt, daß $|L|$ minimal ist.
Sei $i \in L$ und $K := L \setminus \{i\}$.
Dann erfüllt $H \upharpoonright K$ die Hall-Bedingung (da L minimal) und $H(i) \subseteq H(K)$.
$|K| \leq |H(K)| = |H(L)| < |L| = |K| + 1 \implies |H(K)| = |K|$. □

Bemerkung: Ist $(F(i) | i \in \mathbb{N})$ eine abzählbare Familie, dann sind äquivalent:
1. F besitzt keine Hochzeit.
2. Es gibt $K \subseteq I$, K kritisch in F und ein $i \in I \setminus K$ mit $F(i) \subseteq F(K)$.

$K \subseteq I$ heißt **maximal kritisch**, wenn es kein $L \supsetneqq K$ gibt mit L kritisch in H.

Lemma 4

Ist H eine Hall-Familie, dann gibt es ein maximal kritisches K in H.

Beweis: $\mathfrak{L} = \{K | K \text{ ist kritisch in } H\}$, $\emptyset \in \mathfrak{L}$.

Beh.: Ist $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ eine Kette bezüglich $\subseteq$, dann ist $L = \bigcup \mathfrak{K} \in \mathfrak{L}$.

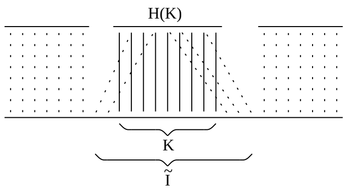
Bew.: 1. Sei $J \subset\subset L$, dann gibt es ein $K \in \mathfrak{K}$ mit $J \subset\subset K$.
Also ist $|H(J)| \geq |J|$ und somit besitzt $H \upharpoonright L$ eine Hochzeit.
2. Sei f eine Hochzeit von $H \upharpoonright L$. Dann ist $f[K] = H(K)$ für alle $K \in \mathfrak{K}$
$\implies f[L] = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} f[K] = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} H(K) = H(\bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K) = H(L)$. □

Satz 5

Sei $H = (H(i) | i \in I)$ eine Hall-Familie und K maximal kritisch in H, dann besitzt
$H' = (H(i) \setminus H(K) | i \in I \text{ mit } H(i) \setminus H(K) \neq \emptyset)$ eine injektive Auswahlfunktion.

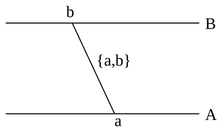
Beweis: Sei $\tilde{I} = \{i | H(i) \subseteq H(K)\}$.

Angenommen: H' besitzt keine Hochzeit. Dann gibt es ein $L \subset\subset I \setminus \tilde{I}$ und L ist kritisch in H' und ein $i \in I \setminus (\tilde{I} \cup L)$ mit $H'(i) \subseteq H'(L) \implies L \neq \emptyset$.
Beh.: $L \cup K$ ist kritisch in H.
Bew.: Sei f eine Hochzeit von $H \upharpoonright K$ und sei g eine Hochzeit von $H' \upharpoonright L$, dann ist $f \cup g$ eine Hochzeit von $H \upharpoonright (K \cup L)$.
Sei g eine Hochzeit von $H \upharpoonright (K \cup L)$. Dann ist $g \upharpoonright K$ eine Hochzeit von $H \upharpoonright K$. Da K kritisch, ist $g[K] = H(K) \implies g \upharpoonright L$ ist eine Hochzeit von $H' \upharpoonright L$.
Da L kritisch, ist $g[L] = H'(L) = H(L) \setminus H(K) \implies Nb\ g = H(K) \cup H(L) = H(K \cup L)$.
Da $L \cup K \supsetneqq K$ erhalten wir eine Widerspruch zur Maximalität von K. □



K ist maximal kritisch, $\tilde{I} = \{i | H(i) \subseteq H(K)\}$.

Also sind äquivalent:
H besitzt eine Hochzeit
$K = \tilde{I}$ mit K maximal kritisch.

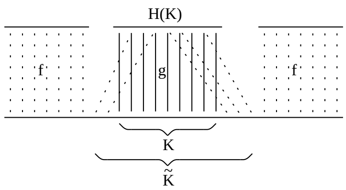


Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. $A \cup B$ heißt **Eckenmenge**.
Sei $R = \{\{a,b\} | a \in A \text{ und } b \in B\}$. R heißt **Kantenmenge**.
$(A \cup B, R)$ nennt man dann einen **bipartiten Graphen**.

Eine Ecke a liegt auf der Kante $\{c,d\}$, wenn $a \in \{c,d\}$.
Man nennt eine Kantenmenge S **disjunkt**, wenn für alle $\{a,b\}$, $\{c,d\} \in S$ mit $\{a,b\} \neq \{c,d\} \implies \{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$.
Man nennt eine Eckenmenge C **A und B trennend**, wenn auf jeder Kante $\{a,b\} \in R$ eine Ecke aus C liegt, d.h. $\{a,b\} \cap C \neq \emptyset$.

Satz 6 (König)

Sei $(A \cup B, R)$ ein bipartiter Graph mit $|\{\{a,b\} | \{a,b\} \in R\}|$ ist endlich für jedes $a \in A$. Dann gibt es eine disjunkte Menge S von Kanten und eine trennende Eckenmenge C mit: Auf jeder Kante von S liegt genau eine Ecke aus C.
Beweis: Für $a \in A$ sei $H(a) = \{b | \{a,b\} \in R\}$.
$H = (H(a) | a \in A)$ ist eine Hall-Familie.
Sei K maximal kritisch in H und sei g eine injektive Auswahlfunktion von $H \upharpoonright K$.
Sei f eine Hochzeit von $H' = (H(i) \setminus H(K) | i \in I \text{ und } H(i) \not\subseteq H(K))$.
Sei $S = \{\{a, g(a)\} | a \in K\} \cup \{\{a, f(a)\} | H(a) \not\subseteq H(K)\}$.
Dann ist S eine Menge von disjunkten Kanten.
Sei $C := H(K) \cup (A \setminus \tilde{K})$.
Dann ist C eine A und B trennende Eckenmenge mit $|C \cap \{a,b\}| = 1$ für jedes $\{a,b\} \in S$. □



Kapitel 2

Lateinische Quadrate

Euler formulierte in einer Schrift an die Zarin Katharina die Große (~1782) folgendes Problem:

Gegeben seien sechs Regimenter und sechs Offiziersdienstgrade. Aus jedem Regiment wähle man je sechs Offiziere mit diesen Dienstgraden.

Kann man diese 36 Offiziere so in einer 6×6 Formation aufstellen, daß in jeder Reihe und Spalte jedes Regiment und jeder Dienstgrad genau einmal vorkommt?

2.1 Algebra aus der Zeit von Euler

Sei R ein **Ring**. $J \subseteq R$ heißt **Ideal**, wenn $J \neq \emptyset$ und

1. $a, b \in J \implies a + b \in J$
2. $a \in J,\ b \in R \implies a \cdot b \in J$.

Beispiel: Sei $R = \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann ist $(n) = \{r \cdot n | r \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal.
Seien $n, m \in \mathbb{Z}$, dann ist $(n, m) = \{r \cdot n + s \cdot m | r, s \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal.

Man nennt einen Ring R **Hauptidealring**, wenn es zu jedem Ideal $J \subseteq R$ ein $a \in R$ gibt mit $(a) = \{r \cdot a | r \in R\} = J$.

Lemma 1 $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.
Beweis: Ist $|J| = 1$, dann ist $J = (0)$.
Sonst sei n das kleinste Element aus $\{r \in J | r > 0\}$. Dann ist $(n) \subseteq J$.
Beh.: $J \subseteq (n)$.
Bew.: Sei $r \in J$.
Nach dem Lemma von Euklid gibt es dann $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq q < n$ und $r = p \cdot n + q$.
$n \in J, r \in J \implies q = p \cdot n - r \in J$.
Da $q < n \implies q = 0 \implies r = p \cdot n \implies r \in (n)$. □

Lemma 1' Ist K ein Körper, dann ist $K[x]$ ein Hauptidealring.

Bemerkung: Sei $a, b, c \in R \setminus \{0\}$ mit $\{r \cdot c | r \in R\} = (c) = (a, b) = \{r \cdot a + s \cdot b | r, s \in R\}$, dann ist $c = ggT(a, b)$.

Sei R ein Ring und J ein Ideal mit $J \neq R$, dann sei $\sim$ definiert durch:
$a \sim b$ falls $a - b \in J$.
Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \sim \text{ ist eine Äquivalenzrelation.} \\ 2. & a \sim a' \text{ und } b \sim b' \implies a + b \sim a' + b' \\ 3. & a \sim a' \text{ und } b \sim b' \implies a \cdot b \sim a' \cdot b' \end{array}\right\} \sim \text{ ist Kongruenzrelation.}$$

Sei $\tilde{a} = \{b | a \sim b\}$ und ${}^{R}\!/_{J} = \{\tilde{a} | a \in R\}$. Man definiert $\tilde{a} + \tilde{b} = \widetilde{a + b},\ \tilde{a} \cdot \tilde{b} = \widetilde{a \cdot b}$. $\tilde{0} = J$.

Dann ist ${}^{R}\!/_{J}$ ein Ring.

Beispiel:

- $R = \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dann ist $\mathbb{Z}_n := {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(n)} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \ldots, \widetilde{n-1}\}$, also $|\mathbb{Z}_n| = n$.
- Sei K ein Körper und $f \in K[x]$. Dann ist $R = {}^{K[x]}\!/_{(f)}$ ein Ring. Setzt man für $a \in K$ und $\tilde{g} \in R:\ a \cdot \tilde{g} = \widetilde{a \cdot g}$, dann ist R ein Vektorraum über K mit der Basis $\{\tilde{1}, \tilde{x}, \ldots, \tilde{x}^{s-1}\}$ mit $s = grad(f)$. Also ist $|R| = |K|^s$.

Euler interessierte sich für die Einheiten in Ringen R.
a heißt **Einheit**, wenn es ein $c \in R$ gibt mit $a \cdot c = 1$.
Sei $E_R = \{c \in R | c \text{ ist Einheit}\}$.

Bemerkung:
1. E_R ist bzgl. $\cdot$ eine Gruppe.
2. $-1 \in E_R$.

Lemma 2 Es sind äquivalent:
1. $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_n$ ist Einheit.
2. $ggT(m,n) = 1$.

Beweis: $2 \Rightarrow 1$: Da der $ggT(m,n) = 1$, ist $(1) = (m,n) \implies 1 \in (m,n)$
$\implies \exists l,k$ mit $1 = l \cdot m + k \cdot n \implies \tilde{1} = \tilde{l} \cdot \tilde{m} + \tilde{k} \cdot \underbrace{\tilde{n}}_{=\tilde{0}}$, also ist $\tilde{1} = \tilde{l} \cdot \tilde{m}$.

$1 \Rightarrow 2$: Da $\tilde{m}$ eine Einheit ist, gibt es $\tilde{l}$ mit $\tilde{m} \cdot \tilde{l} = \tilde{1} \implies m \cdot l - 1 \in (n) \implies m \cdot l - 1 = k \cdot n$
$\implies 1 = m \cdot l + k \cdot n \implies (1) = (m,n) \implies ggT(m,n) = 1.$ $\square$

n	2	3	4	5	6	7	8
$E_{\mathbb{Z}_n}$	$\{\tilde{1}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{2}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{3}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{2},\tilde{3},\tilde{4}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{5}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{2},\tilde{3},\tilde{4},\tilde{5},\tilde{6}\}$	$\{\tilde{1},\tilde{3},\tilde{5},\tilde{7}\}$

Sei R ein Ring. Zwei Einheiten $a,b \in R$ heißen **orthogonal**, wenn $a - b$ eine Einheit ist.
Ist R ein Körper und $a,b \in R \setminus \{0\}$ mit $a \neq b$, dann ist $a - b$ eine Einheit und somit a und b orthogonal.

Lemma 3 Sei $n > 2$. Dann sind äquivalent:
1. $2 \nmid n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus (2))$.
2. $\mathbb{Z}_n$ besitzt 2 orthogonale Einheiten.

Beweis: $1 \Rightarrow 2$: $ggT(2,n) = 1 \implies \tilde{2}$ ist Einheit, $\tilde{1}$ ist Einheit und $\tilde{2} - \tilde{1} = \tilde{1}$ ist Einheit.
$\neg 1 \Rightarrow \neg 2$: Seien $\tilde{k}, \tilde{l}$ Einheiten in $\mathbb{Z}_n \implies ggT(k,n) = 1,\ ggT(l,n) = 1$.
Da $2|n \implies k$ ungerade, l ungerade $\implies k - l$ ist gerade
$\implies ggT(n, k-l) \geq 2 \implies \widetilde{k-l} = \tilde{k} - \tilde{l}$ ist keine Einheit. $\square$

Lemma 4 Ist $s \geq 2$, dann gibt es einen Ring R mit $|R| = 2^s$ und R besitzt zwei orthogonale Einheiten.

Beweis: Sei $R = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^s+x+1)}$.
Beh.: $\tilde{1}$ und $\tilde{x}$ sind orthogonale Einheiten.
Bew.: $\tilde{0} = x^s \widetilde{+ x} + 1 \implies \tilde{1} = \widetilde{-1} = \tilde{x}(\tilde{x}^{s-1} + \tilde{1}) \implies \tilde{x}$ ist Einheit.
E_R ist Gruppe $\implies \tilde{x}^s$ ist Einheit.
$\implies \tilde{1} - \tilde{x} = \tilde{x} + \tilde{1} = \tilde{x}^s$ ist Einheit, also sind $\tilde{1},\ \tilde{x}$ orthogonal. $\square$

Satz 5 Ist $n \in (4)$, dann gibt es einen Ring R mit 2 orthogonalen Einheiten und $|R| = n$.

Beweis: Sei $s \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^s \cdot k$ und $ggT(2,k) = 1$.
Sei $R_1 = \mathbb{Z}_k$ und $R_2 = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{(x^s+x+1)}$.
Dann enthält R_1 zwei orthogonale Einheiten a_1, b_1 und R_2 zwei orthogonale Einheiten a_2, b_2.
Sei $R = R_1 \times R_2$. Dann ist $|R| = |R_1| \cdot |R_2| = k \cdot 2^s = n$.
$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 + s_2),\ (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2)$.
Dann ist R ein Ring und $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ und $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ sind Einheiten. $\square$

Wir haben gezeigt: $n \notin \{2k | k \text{ ungerade}\}$, dann gibt es einen Ring R mit $|R| = n$, der zwei orthogonale Einheiten besitzt.

Satz 6 Ist $n \in (2) \setminus (4)$, dann gibt es keinen Ring R mit zwei orthogonalen Einheiten und $|R| = n$.

Beweis: Sei $S = \{r | r + r = 0\}$. S ist bzgl. $+$ eine abelsche Untergruppe von R.
Also gilt für $m = |S|$: $m|n$ ($\rightsquigarrow$ Lagrange).
Wir werden ferner benutzen: Ist T eine (abelsche) Gruppe und p eine Primzahl mit $p|\ |T|$, dann gibt es $a \in T$ mit $ord(a) = p$.
$2|n$, also gibt es ein r mit $ord(r) = 2 \implies |S| \geq 2$.
Wir wissen: $|S|$ teilt $|R|$.
Ist $|S| > 2$, dann gibt es eine Primzahl $p > 2$ und $p|\ |S|$.
Dann gibt es ein $s \in S$ mit $ord(s) = p \implies s + s \neq 0$ # zur Definition von S.
Also ist $|S| = 2$. Sei $r \in S$ mit $r \neq 0$.
Seien a, b Einheiten von R. Dann ist $a \cdot r \neq 0$ und $b \cdot r \neq 0$.
$ord(a \cdot r) = ord(b \cdot r) = 2 \implies a \cdot r = r$ und $b \cdot r = r \implies a \cdot r - b \cdot r = (a - b) \cdot r = 0$
$\implies a - b$ ist keine Einheit. $\square$

2.2 Lateinische Quadrate

Sei R ein Ring. Zwei Einheiten $a,b \in R$ heißen orthogonal, wenn $a - b$ eine Einheit ist.
Wir hatten gezeigt: Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, dann sind äquivalent:

1. $n \in (2) \setminus (4)$, d.h. $n = 2 + 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
2. Es gibt keinen Ring R mit $|R| = n$ der zwei orthogonale Einheiten besitzt.

Wir nennen $Q : N \times N \to N$ ein lateinisches Quadrat, wenn gilt:
1. Für alle $r, u \in N$ gibt es genau ein $s \in N$ mit $Q(r,s) = u$.
2. Für alle $s, u \in N$ gibt es genau ein $r \in N$ mit $Q(r,s) = u$.

Ist $|N| = n$, dann nennt man Q ein lateinisches Quadrat der Ordnung n.

Erzeugung: Sei R ein Ring, dann sei für $a \in R$:

$$Q_a : \begin{cases} R \times R & \to & R \\ (r,s) & \mapsto & a \cdot r + s \end{cases}$$

Lemma 1 Es sind äquivalent:
1) Q_a ist ein lateinisches Quadrat.
2) a ist Einheit.

Beweis:
$1 \Rightarrow 2$: Da Q_a lateinisch ist, gibt es zu $0, 1 \in R$ ein $r \in R$ mit $Q(r, 0) = 1 \implies a \cdot r + 0 = 1$, d.h. a ist Einheit.
$2 \Rightarrow 1$: Zu 1: (Existenz) Seien $r, t \in R$, $s = t - ar$. Dann ist $Q_a(r,s) = a \cdot r + s = t$.
(Eindeutigkeit) Sei $Q_a(r, s_1) = t$, $Q_a(r, s_2) = t \implies a \cdot r + s_1 = t = a \cdot r + s_2 \iff s_1 = s_2$.
Zu 2: (Existenz) Seien $s, t \in R$ und $r = a^{-1}(t - s)$. Dann ist $Q_a(r,s) = a \cdot r + s = t$.
(Eindeutigkeit) Seien $r_1, r_2 \in R$ mit $Q_a(r_1, s) = a \cdot r_1 + s = a \cdot r_2 + s = Q_a(r_2, s) \implies a(r_1 - r_2) = 0$
$\overset{a \text{ Einheit}}{\implies} r_1 = r_2$. □

Beispiel: $R = \mathbb{Z}_3$. Dann sind $\tilde{1}$ und $\tilde{2}$ Einheiten in R.

$Q_{\tilde{1}}(r,s) = \tilde{1}r + s$

$r \backslash s$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$
$\tilde{2}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$

$Q_{\tilde{2}}(r,s) = \tilde{2}r + s$

$r \backslash s$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{2}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$

Beispiel: $R = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}\!/\!_{x^2+x+1}$, $R = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{x}, \widetilde{x+1}\}$. Einheiten sind $\{\tilde{1}, \tilde{x}, \widetilde{x+1}\}$.

$Q_{\tilde{1}}(r,s) = \tilde{1} \cdot r + s$

$+$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$
$\tilde{x}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\widetilde{x+1}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$

$\cdot$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{x}$	$\tilde{0}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{1}$
$\widetilde{x+1}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$

$Q_{\tilde{x}}(r,s) = \tilde{x} \cdot r + s$

$r \backslash s$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$
$\widetilde{x+1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$

$Q_{\widetilde{x+1}}(r,s) = \widetilde{x+1} \cdot r + s$

$r \backslash s$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$
$\tilde{1}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$
$\tilde{x}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$
$\widetilde{x+1}$	$\tilde{x}$	$\widetilde{x+1}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$

Zwei lateinische Quadrate Q_1, Q_2 heißen über N **orthogonal**, wenn $O : \begin{cases} N \times N & \to & N \times N \\ (r,s) & \mapsto & (Q_1(r,s), Q_2(r,s)) \end{cases}$ eine surjektive Abbildung ist.

Lemma 2 Sei R ein Ring und a, b Einheiten. Dann sind äquivalent:
1. Q_a und Q_b sind orthogonal.
2. a, b sind orthogonale Einheiten.

Beweis: $2 \Rightarrow 1$: Seien $u, v \in R$. Wir haben $(r,s) \in R \times R$ zu finden mit $Q_a(r,s) = u$ und $Q_b(r,s) = v$, d.h.
es ist das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{c} a \cdot r + s = u \\ b \cdot r + s = v \end{array} \right|$ zu lösen. Man wähle $r = (a-b)^{-1}(u - v)$, $s = u - a \cdot r$.
Dann ist (r,s) eine Lösung des GS.
$1 \Rightarrow 2$: Da Q_a und Q_b orthogonal sind, gibt es $r, s \in R$ mit $Q_a(r,s) = 1$ und $Q_b(r,s) = 0$
$\implies a \cdot r + s = 1$, $b \cdot r + s = 0 \implies (a - b)r = 1$, also ist $a - b$ Einheit. □

Folgerung 3 Ist $n \notin (2) \setminus (4)$, d.h. $n \neq 2 + 4m$, dann gibt es zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung n.

Beispiel: $n=3: \quad r=\mathbb{Z}_3$, $\quad Q_{\tilde{1}},\ Q_{\tilde{2}}$ sind orthogonal
$n=4: \quad R = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}/_{x^s+x+1}$, $\quad$ dann sind $Q_{\tilde{1}}, Q_{\tilde{x}}, Q_{\widetilde{1+x}}$ paarweise orthogonal.
$n=5: \quad R=\mathbb{Z}_5$, $\quad$ dann sind $Q_{\tilde{1}}, Q_{\tilde{2}}, Q_{\tilde{3}}, Q_{\tilde{4}}$ paarweise orthogonal.
$n=6: \quad 6=2+4\cdot 1$

Ist $n=2+4m$, dann gibt es keinen Ring R mit $|R|=n$, der orthogonale Einheiten besitzt.
Euler vermutete: Ist $n=2+4m$, dann gibt es keine zwei orthogonalen Quadrate der Ordnung n (~1780)
1900 wurde diese Vermutung für $n=6$ bestätigt.
Um 1960 fand man je 2 orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 10 und 14.
1960 zeigt ein Inder: Ist $n=2+4m$ und $n\geq 18$, dann existieren zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung n.

Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann lautet das $n\cdot n$-Offiziers-Problem:
Gegeben seien n Regimenter und n Offiziersdienstgrade. Aus jedem Regiment wähle man zu jedem Dienstgrad einen Offizier dieses Dienstgrades. Kann man diese $n\cdot n$ Offiziere so in einer $n\times n$-Formation aufstellen, daß in jeder Spalte und jeder Reihe jedes Regiment und jeder Dienstgrad genau einmal vorkommt?

Angenommen, es existiert für n eine solche Formation. Den Regimentern gebe man die Nummern $1,\dots,n$, den Dienstgraden ebenfalls die Nummern $1,\dots,n$. Sei dann (i,k) der Offizier aus dem Regiment i mit dem Dienstgrad k.
Sei $N=\{1,\dots,n\}$.
Die Formation ist dann eine Funktion $O: N\times N \underset{\text{auf}}{\overset{1-1}{\to}} N\times N$.

Sei $Q_1: \begin{cases} N\times N & \to \quad N \\ (r,s) & \mapsto \quad i \text{ mit } O(r,s)=(i,k)\end{cases}$

Q_1 ordnet jedem Platz das Regiment zu. Da in jeder Spalte und jeder Reihe jedes Regiment genau einmal vorkommt, ist Q_1 ein lateinisches Quadrat.

Sei $Q_2: \begin{cases} N\times N & \to \quad N \\ (r,s) & \mapsto \quad k \text{ mit } O(r,s)=(i,k)\end{cases}$

Dann ist Q_2 ein lateinisches Quadrat.
Da $O(r,s)=(Q_1(r,s),Q_2(r,s))$ ist und $O: N\times N \underset{\text{auf}}{\to} N\times N$, sind Q_1,Q_2 orthogonal.

Folgerung 4 Für $n\in\{2,6\}$ gibt es keine Lösung des $n\cdot n$-Offiziers-Problems.
Sonst gibt es eine Lösung, da für n zwei orthogonale lateinische Quadrate existieren.

Die 1. Kavallerie-Division (Ostpreußen) bestand 1941 aus:

1. Reiterregiment
2. Reiterregiment
21. Reiterregiment
22. Reiterregiment

1. Aus jedem Regiment wähle man den Oberst:
   $O_1=(1,1)$ $\quad O_{21}=(3,1)$
   $O_2=(2,1)$ $\quad O_{22}=(4,1)$ (Freiherr von Broich)
2. Aus jedem Regiment wähle man den Stabsarzt:
   $A_1=(1,2)$ $\quad A_{21}=(3,2)$ (Dr. Askani)
   $A_2=(2,2)$ $\quad A_{22}=(4,2)$ (Dr. Podewski)
3. Einen Leutnant
   $L_1=(1,3)$ $\quad L_{21}=(3,3)$
   $L_2=(2,3)$ $\quad L_{22}=(4,3)$ (von Unruh)
4. Einen Major
   $M_1=(1,4)$ $\quad M_{21}=(3,4)$
   $M_2=(2,4)$ $\quad M_{22}=(4,4)$

Man wähle zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 4:

Regimenter

Q_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Dienstgrade

Q_2	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

$O(r,s)=(Q_1(r,s),Q_2(r,s))$

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
2	(2,3)	(1,4)	(4,1)	(3,2)
3	(3,4)	(4,3)	(1,2)	(2,1)
4	(4,2)	(3,1)	(2,4)	(1,3)

	O_1	A_2	L_{21}	M_{22}
	L_2	M_1	O_{22}	A_{21}
	M_{21}	L_{22}	A_1	O_2
	A_{22}	O_{21}	M_2	L_1

2.3 Projektive Ebenen

Sei K ein Körper, dann sei $P=K\times K$. $(r,s)\in K\times K$ heißt **Punkt der Ebene**.

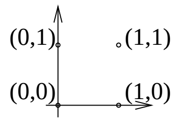
Zu jedem $a\in K$ setzen wir $Q_a: \begin{cases} K\times K & \to \quad K \\ (r,s) & \mapsto \quad a\cdot r+s\end{cases}$. Sei $Q_\infty: \begin{cases} K\times K & \to \quad K \\ (r,s) & \mapsto \quad r\end{cases}$.

$g\subset\subset K\times K$ heißt **Gerade**, wenn es ein $a\in K\cup\{\infty\}$ und ein $b\in K$ gibt mit

$$g=\{(r,s)|Q_a(r,s)=b\}=\begin{cases}\{(r,s)|a\cdot r+s=b\}=\{(r,s)|s=-a\cdot r+b\} & \text{falls } a\neq\infty \\ \{(r,s)|r=b\}=\{(b,s)|s\in K\} & \text{falls } a=\infty\end{cases}.$$

Sei $G=\{g|g \text{ ist Gerade}\}$.
Zwei Gerade g_1,g_2 heißen **parallel**, wenn es a und b_1,b_2 gibt mit $g_1=\{(r,s)|Q_a(r,s)=b_1\}$, $g_2=\{(r,s)|Q_a(r,s)=b_2\}$.

Dann ist $|P| = |K|^2,\ |G| = |K|^2 + |K|$.
Ist $g \in G \implies |g| = |K|,\ p \in K \times K \implies |\{g|p \in g\}| = |K| + 1$.
(P, G) heißt **affine Ebene** über K.



Eigenschaften affiner Ebenen:
1. Sind $p_1 \neq p_2$ Punkte, dann gibt es genau ein $g \in G$ mit $\{p_1, p_2\} \subseteq g$.
2. Seien $g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2$, dann gilt:
   1. $|g_1 \cap g_2| = 0$, falls g_1, g_2 parallel sind.
   2. $|g_1 \cap g_2| = 1$ sonst.
3. Es gibt vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Man nennt (P, G) eine **projektive Ebene**, wenn $G \subseteq \mathbb{P}(P)$ und:
1. Sind $p_1 \neq p_2,\ p_1, p_2 \in P$, dann gibt es genau ein $g \in G$ mit $\{p_1, p_2\} \subseteq g$.
2. Sind $g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2$, dann ist $|g_1 \cap g_2| = 1$.
3. Es gibt $S \subseteq P$ mit $|S| = 4$ und für alle $g \in G$ ist $|g \cap S| \leq 2$.

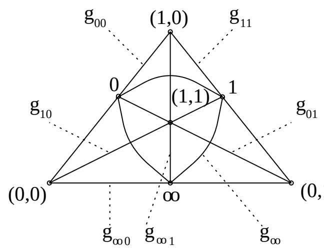
Lemma 1 Zu jedem Körper gibt es eine projektive Ebene (P, G) mit:
1. $|g| = |K| + 1$ für alle $g \in G$.
2. $|\{g \in G|p \in g\}| = |K| + 1$ für alle $p \in P$.
3. $|G| = |P| = |K|^2 + |K| + 1$.

Beweis: Wir setzen 1. $P = K \times K \cup K \cup \{\infty\}$.
2. Sei $a \in K \cup \{\infty\}$ und $b \in K$, dann sei $g = \{(r, s)|Q_a(r, s) = b\} \cup \{a\},\ g_\infty = K \cup \{\infty\}$. □

Beispiel: $K = \mathbb{Z}_2$

$$Q_0 : \begin{cases} K \times K & \to & K \\ (r, s) & \mapsto & 0 \cdot r + s = s \end{cases}.$$
$$Q_1 : \begin{cases} K \times K & \to & K \\ (r, s) & \mapsto & 1 \cdot r + s = r + s \end{cases}.$$
$$Q_\infty : \begin{cases} K \times K & \to & K \\ (r, s) & \mapsto & r = s \end{cases}.$$

$g_{00} = \{(r, s)|Q_0(r, s) = 0\} \cup \{0\} = \{(0, 0), (1, 0)\} \cup \{0\}$.
$g_{01} = \{(0, 1), (1, 1)\} \cup \{0\}$
$g_{10} = \{(0, 0), (1, 1)\} \cup \{1\}$
$g_{11} = \{(0, 1), (1, 0)\} \cup \{1\}$
$g_{\infty 0} = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{\infty\}$
$g_{\infty 1} = \{(1, 0), (1, 1)\} \cup \{\infty\}$
$g_\infty = \{0, 1, \infty\}$.

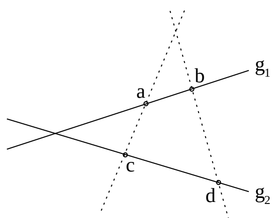


(Minimalmodell einer projektiven Ebene)

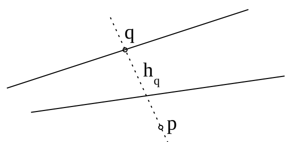
Satz 2 Sei (P, G) eine projektive Ebene, die endlich ist. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit:
1. $|g| = n + 1$ für $g \in G$.
2. $|\{g \in G|p \in g\}| = n + 1$ für $p \in P$.
3. $|P| = |G| = n^2 + n + 1$.

n nennt man die **Ordnung** von (P, G).

Beweis: Behauptung 1: Sind $g_1, g_2 \in G$, dann gibt es ein $p \in P$ mit $p \notin g_1 \cup g_2$.
Beweis: Sei $S \subseteq P$ mit $|S| = 4$ und $|g \cap S| \leq 2$ mit $g \in G$.
1. Fall: $S \not\subseteq g_1 \cup g_2$. Sei $p \in S \setminus (g_1 \cup g_2)$.
2. Fall: $S \subseteq g_1 \cup g_2$. Dann sei $\{a, b\} = g_1 \cap S$ und $\{c, d\} = g_2 \cap S$.
Sei $g_3 \cap S = \{a, c\}$ und $g_4 \cap S = \{b, d\}$.
Es ist $g_3 \neq g_4$, da sonst $S \subseteq g_3\ (= g_4)$.
Sei p der Schnittpunkt von g_3 und g_4
Dann ist $\{p, a, c\} \subseteq g_3$ und $\{p, b, d\} \subseteq g_4$.
Es ist $p \notin S$, denn $g_3 \cap S = \{a, c\}$ und $g_4 \cap S = \{b, d\}$.
Ist $\{p, a, b\} \subseteq g_1 \implies g_1 = g_3,\ g_1 = g_4$. Dann wäre $S \subseteq g_1$ #.
Ist $\{p, c, d\} \subseteq g_2 \implies g_2 = g_3,\ g_2 = g_4$. Dann wäre $S \subseteq g_2$ #.
Also ist $p \notin g_1 \cup g_2$.



Behauptung 2: Sind $g_1, g_2 \in G$, dann ist $|g_1| = |g_2|$.
Beweis: Sei $p \in P$ und $p \notin g_1 \cup g_2$.
Für jedes $q \in g_1$ sei $h_q \in G$ mit $\{p, q\} \subseteq h_q$.
Sei $\varphi(q)$ der Schnittpunkt von g_2 mit h_q.
$\varphi : g_1 \xrightarrow[\text{auf}]{1-1} g_2$ ist Bijektion nach Konstruktion.

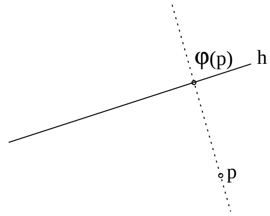


Da $S \subseteq P$ mit $|S| \geq 4$ ist $|g| > 1$ für $g \in G$.
Sei $n := |g| - 1$ (damit ist 1. gezeigt.)
Behauptung 3: Sei $p \in P$, dann gibt es eine Gerade $g \in G$ mit $p \notin g$.
Beweis: Sei $S \subseteq P$ mit $|S| = 4$ und $|S \cap g| \leq 2$ für jedes $g \in G$.
Sei $S = \{a, b, c, d\}$. Sei $g_1 \in G$ mit $g_1 \cap S = \{a, b\},\ g_2 \in G$ mit $g_2 \cap S = \{c, d\},\ g_3 \in G$ mit $g_3 \cap S = \{a, c\}$.

Es genügt zu zeigen: $p \notin g_1 \cap g_2 \cap g_3$.

Angenommen, $p \in g_1 \cap g_2 \cap g_3 \implies p \in g_1 \cap g_3 \implies p = a$
$\implies a \in g_2 \implies \{a, c, d\} \subseteq g_2$ #, da $|S \cap g_2| \leq 2$.

Behauptung 4: $|\{g \in G | p \in g\}| = n + 1$



Beweis: Sei h eine Gerade mit $p \notin h$. Sei dann $g \in G$ mit $p \in g$.

Sei $\varphi(g)$ der Schnittpunkt von g mit h.

Dann ist $\varphi : \{g \in G | p \in g\} \xrightarrow[\text{auf}]{1-1} h \implies |\{g \in G | p \in g\}| = n + 1$.

Behauptung 5: $|P| = n^2 + n + 1$.

Beweis: Sei $p \in P$.

Sei $H = \{g \setminus \{p\} | p \in g \in G\}$. Dann ist $|g \setminus \{p\}| = n$.

Sind $g_1 \setminus \{p\}, g_2 \setminus \{p\} \in H$, $g_1 \neq g_2$, dann ist $(g_1 \setminus \{p\}) \cap (g_2 \setminus \{p\}) = \emptyset$.

$P = \bigcup H \cup \{p\} \implies |P| = |\biguplus H| + 1 = (\sum_{h \in H} |h|) + 1 = (\sum_{h \in H} n) + 1 = (n+1)n + 1$.

Behauptung 6: $|G| = n^2 + n + 1$.

Beweis: Sei $h \in G$. Für jedes $p \in h$ sei $H_p = \{g \in G | p \in g\} \setminus \{h\}$.

$H_p \cap H_q = \emptyset$ für $p, q \in h$ und $p \neq q$.

$|H_p| = n$ für $p \in h$.

Es ist $G = (\bigcup_{p \in h} H_p) \cup \{h\} \implies |G| = |\biguplus_{p \in h} H_p| + 1 = \sum_{p \in h} |H_p| + 1 = (n+1)n + 1$. □

2.4 Projektive Ebene und lateinische Quadrate

Satz 1 Sei $n \geq 2$ und S eine orthogonale Menge lateinischer Quadrate mit $|S| = n - 1$ über $N = \{1, \ldots, n\}$. Dann gibt es eine projektive Ebene (P, G) der Ordnung n.

Beweis: Sei $S = \{Q_1, \ldots, Q_{n-1}\}$. Sei $Q_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} N \times N & \to & N \\ (r,s) & \mapsto & s \end{array} \right.$, $Q_\infty : \left\{ \begin{array}{ccc} N \times N & \to & N \\ (r,s) & \mapsto & r \end{array} \right.$.

Für jedes $a \in N \setminus \{n\} \cup \{0, \infty\} =: N^*$ und jedes $b \in N$ sei $h_{ab} = \{(r,s) | Q_a(r,s) = b\}$.

Behauptung 1: $|h_{ab}| = n$.

Beweis: Ist $a = 0$, dann ist h_{ab} eine Spalte.

Ist $a = \infty$, dann ist h_{ab} eine Zeile.

Sonst kommt b in jeder Zeile und Spalte genau einmal vor.

Behauptung 2: Ist $b \neq d$, dann ist $h_{ab} \cap h_{ad} = \emptyset$.

Beweis: $Q_a(r,s)$ ist eine Funktion.

Behauptung 3: Ist $a \neq c$, $a, c \in N^*$, dann ist $|h_{ab} \cap h_{cd}| = 1$.

Beweis: Wir haben z.z: Es gibt genau ein (r,s) mit $Q_a(r,s) = b$ und $Q_c(r,s) = d$.

Existenz: 1. Fall: $a = \infty$.

a) $c = 0$. Dann sei $(r,s) = (b,d)$.

b) $c \in N$. Dann gibt es ein t mit $Q_c(b,t) = d$. Sei $(r,s) := (b,t)$.

2. Fall: $a = 0$. analog 1. Fall.

3. Fall: $a \in N$.

a) $c = 0$.

b) $c = \infty$.

c) $c \in N$. Dann sind Q_a und Q_c orthogonal, also gibt es (r,s) mit $Q_a(r,s) = b$ und $Q_c(r,s) = d$.

Eindeutigkeit: $O : \left\{ \begin{array}{ccc} N \times N & \to & N \times N \\ (r,s) & \mapsto & (Q_a(r,s), Q_c(r,s)) \end{array} \right.$

Dann ist nach (↑) O surjektiv und somit auch injektiv, also ist (r,s) eindeutig bestimmt.

Wir definieren eine affine Ebene wie folgt:

a) Sei $N \times N$ die Menge der Punkte.

b) Für $a \in N^*$ sei $H_a = \{h_{ab} | b \in N\}$.

c) Sei $H = \bigcup_{a \in N^*} H_a$.

Dann gilt:

1. Sind $p, q \in N \times N$, dann gibt es genau ein $h \in H$ mit $p, q \in h$.

Beweis: (Existenz & Eindeutigkeit)

Für $a \in N^*$ sei $d_a = Q_a(p)$. Sei $h_a = \{(r,s) | Q_a(r,s) = d_a\}$.

Dann ist $h_a \cap h_c = \{p\}$ für $a \neq c$, $a, c \in N^*$.

Nach Behauptung 1 ist $|h_a| = n$. Dann ist $|\bigcup_{a \in N^*} h_a| = |\biguplus_{a \in N^*} (h_a \setminus \{p\}) \uplus \{p\}| = (n+1)(n-1) + 1 = n^2$.

Also ist $N \times N = \biguplus_{a \in N^*} (h_a \setminus \{p\}) \uplus \{p\}$, somit gibt es genau ein $a \in N^*$ mit $q \in h_a$.

2. Sind $h_1, h_2 \in H$, dann gibt es nach Behauptung 2 und 3:

1. Es gibt a mit $h_1, h_2 \in H_a$ und $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ oder

2. $|h_1 \cap h_2| = 1$.

3. Sei $S = \{\underbrace{(1,1)}_{a}, \underbrace{(1,2)}_{b}, \underbrace{(2,1)}_{c}, \underbrace{(2,2)}_{d}\}$.

Dann gilt für jede Gerade g $|S \cap g| \leq 2$.

Beweis: $h_{\infty 1} = \{(1,s)|s \in N\}$, $h_{\infty 2} = \{(2,s)|s \in N\} \implies h_{\infty 1} \cap h_{\infty 2} = \emptyset$.

$\{a,b\} \subseteq h_{\infty 1}$, $\{c,d\} \subseteq h_{\infty 2}$. Angenommen, es gibt ein g mit $|g \cap S| \geq 3$.

1. Fall: $a \notin g$ oder $b \notin g$: $\implies$ $\{c,d\} \subseteq g \implies g = h_{\infty 2}$ und $g \cap h_{\infty 1} \neq \emptyset$ #

2. Fall: $c \notin g$ oder $d \notin g$: analog.

Sei $P = N \times N \cup N^*$ und für $h \in H_a$ sei $g = h \cup \{a\}$. $g_\infty = N \cup \{\infty\}$.

Dann ist (P, G) eine projektive Ebene. □

Satz 2 Gegeben sei eine projektive Ebene der Ordnung n. Dann gibt es eine Menge S von orthogonalen lateinischen Quadraten mit $|S| = n-1$ über $N = \{1, \dots, n\}$.

Beweis: Sei $g_\infty \in G$. Dann ist $|g_\infty| = n+1$.

Sei o.B.d.A. $g_\infty = \{1, \dots, n\} \cup \{\infty\}$. Sei $N^* = (g_\infty \setminus \{n\}) \cup \{0\}$.

Für $a \in g_\infty$ sei $H_a = \{g \setminus \{a\} | g \in G \setminus g_\infty$ und $a \in g\}$.

Dann gilt:

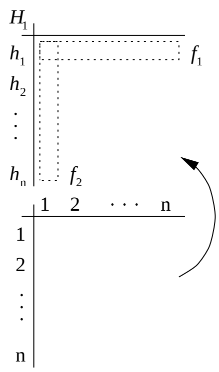
a) $|H_a| = n$.

b) Ist $h \in H_a$, dann ist $|h| = n$.

c) $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ für $h_1, h_2 \in H_a, h_1 \neq h_2$.
Somit ist $|\bigcup H_a| = n^2$.

d) $\bigcup H_a = P \setminus g_\infty$.

e) Ist $a \neq c$ und $h_1 \in H_a$, $h_2 \in H_c \implies |h_1 \cap h_2| = 1$.



Sei $h_1 \in H_1$. Dann gibt es ein $f_1 : \{(1,s)|s \in N\} \underset{\text{auf}}{\xrightarrow{1-1}} h_1$.

Sei $h_\infty \in H_\infty$ mit $h_\infty \cap h_1 = \{f_1(1,1)\}$.

Sei $f_2 : \{(r,1)|r \in N\} \underset{\text{auf}}{\xrightarrow{1-1}} h_\infty$ mit $f_2((1,1)) = f_1((1,1))$.

Sei $F : N \times N \to P \setminus g_\infty$ mit:

1. $F \supseteq f_1 \cup f_2$.
2. Sei $p \in P \setminus (g_\infty \cup h_\infty \cup h_1)$, dann gibt es genau ein $g_1 \in H_1$ mit $p \in g_1$ und genau ein $g_\infty \in H_\infty$ mit $p \in g_\infty$. Sei (r,s) so gewählt, daß $(1,s) \in g_1$ und $(r,1) \in g_\infty$. Wir setzen $F(r,s) = p$. Dann ist $F : N \times N \underset{\text{auf}}{\xrightarrow{1-1}} P \setminus g_\infty$, da $|N \times N| = |P \setminus g_\infty| < \infty$.

Wie können o.B.d.A. annehmen, daß $P \setminus g_\infty = N \times N$ und $F = id_{P \setminus g_\infty}$ ist.

Dann ist $P = N \times N \cup N \cup \{\infty\}$.

Sei für $a \in N^* = (N \setminus \{n\}) \cup \{0, \infty\}$ $Q_a(r,s)$ wie folgt definiert:

Sei $b \in N$, dann gibt es genau eine Gerade $h_b \in H_a$ mit $(1,b) \in h_b$ (nach c), d)).

$Q_a(r,s) = b$ für $(r,s) \in h_b$.

Dann ist $Q_a : N \times N \to N$.

Wir notieren:

f) Zu jedem b gibt es genau ein $h_a \in H_a$ mit $h_a = \{(r,s)|Q_a(r,s) = b\}$.

g) $Q_0(r,s) = s$, $Q_\infty(r,s) = r$.

h) Seien $a \neq c$, $a, c \in N^*$ und $b, d \in N$, dann gibt es genau ein $(r,s) \in N \times N$ mit $Q_a(r,s) = b$ und $Q_c(r,s) = d$.

Beweis: Sei $g_a \in H_a$ mit $g_a = \{(r,s)|Q_a(r,s) = b\}$ und $g_c \in H_c$ mit $g_c = \{(r,s)|Q_c(r,s) = d\}$.

Dann ist $(r,s) \in g_a \cap g_c \iff Q_a(r,s) = b$ und $Q_c(r,s) = d$.

Da $a \neq c \implies |g_a \cap g_c| = 1$

Behauptung: Ist $a \in \{1, \dots, n-1\}$, dann ist Q_a ein lateinisches Quadrat.

i) Zu jedem $s, b \in N$ gibt es genau ein $r \in N$ mit $Q_a(r,s) = b$.

Beweis: Es gibt genau ein (r,s) mit $Q_0(r,v) = s$ und $Q_a(r,v) = b$.

$\implies v = s \implies Q_a(r,s) = b$. □

2.5 (0,1)-Matrizen

Sei $A = (a_{ik})$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ik} \in \{0,1\}$ und

1. $a_{ik} = a_{ki}$
2. Ist $l \neq k$, dann gibt es genau ein i mit $a_{ik} = 1$ und $a_{il} = 1$.
3. Für alle l, k gibt es ein j mit $a_{jk} = 0$ und $a_{jl} = 0$.

Wir wollen zeigen:

a) Ist $A^2 = B = (b_{ik})$, dann gibt es ein $m \geq 3$ mit $b_{ik} = \begin{cases} m & \text{für } i = k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Hieraus wird folgen:

b) $n = m^2 - m + 1$, $Spur(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii} > 0$.

Beipiele:

$\underline{n=1:}$ $A=(0)$.

$$\underline{n=7:}\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$B=A^2,\ b_{ik}=\begin{cases}3 & \text{für } i=k\\ 1 & \text{für } i\neq k\end{cases},\ n=m^2-m+1,\ Spur(A)=m=3.$$

Beweis: a) Wir setzen $N=\{1,2,\dots,n\}$ und $S_k=\{i|a_{ik}=1\}$ für $k\in N$.

$|S_k|$ gibt die Zahl der Einsen in der k-ten Spalte (Zeile) an.

Die Bedingungen 1-3 sind dann äquivalent zu:

1. $i\in S_k \iff k\in S_i$.
2. $|S_l\cap S_k|=1$ für $l\neq k$.
3. Für alle l,k gibt es ein j mit $j\notin S_k\cup S_l$.

Sei $i,k\in N$. Dann ist $a_{il}\cdot a_{lk}=a_{li}\cdot a_{lk}=1$ gdw. $l\in S_i\cap S_k$.

Also ist $b_{ik}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}a_{lk}=|S_i\cap S_k|$.

Nach 2 ist $b_{ik}=1$ für $i\neq k$.

Lemma 1 Es gibt ein $m\geq 3$ mit $|S_l|=m$ für alle $l\in N$.

Beweis: Wir wählen $k\in N$ mit $|S_k|$ maximal. Sei $m=|S_k|$.

4. Ist $i\neq j$, dann gibt es genau ein k mit $\{i,j\}\subseteq S_k$.

Beweis: Nach 2 gibt es ein $k\in S_i\cap S_j$.

Dann ist nach 1 $i\in S_k$ und $j\in S_k$.

Seien $k,l\in N$ mit $\{i,j\}\subseteq S_k\cap S_l$. Dann ist nach 2 $k=l$.

5. Ist $j\notin S_l$, dann ist $|S_j|\geq|S_l|$.

Beweis: Zu $i\in S_l$ gibt es genau ein $g(i)\in N$ mit $\{i,j\}\subseteq S_{g(i)}$ (nach 4).

Da $j\in S_{g(i)}$ ist nach 1: $g(i)\in S_j$.

Also ist $g: S_l\stackrel{1-1}{\longrightarrow}S_j$, also $|S_j|\geq|S_l|$.

6. Ist $l\in N$, dann ist $|S_l|=m$.

Beweis: Nach 3 gibt es ein j mit $j\notin S_k$ und $j\notin S_l$.

Dann ist $l\notin S_j$ nach 1 $\stackrel{5)}{\Longrightarrow}$ $m\geq|S_l|\stackrel{l\notin S_j}{\geq}|S_j|\stackrel{j\notin S_k}{\geq}|S_k|=m$.

7. $m\geq 3$.

Beweis: Nach 3 ist $|N|\geq 2$. Nach 4 gibt es ein u mit $|S_u|\geq 2$.

Sei $v\in N\setminus\{u\}$. Nach 3 gibt es dann ein j mit $j\notin S_u\cup S_v$.

Sei $i\in S_u$. Dann gibt es ein w mit $\{i,j\}\subseteq S_w$ nach 4. Dann ist $|\{u,v,w\}|=3$.

Ist $|S_w|\geq 3$, dann ist $m\geq 3$.

Sei also $|S_w|=2$. Dann ist $S_w=\{i,j\}$. Da $|S_w\cap S_v|=1\stackrel{j\notin S_v}{\Longrightarrow}i\in S_v$.

Also ist $i\in S_v,\ i\in S_u,\ i\in S_w\implies\{u,w,v\}\subseteq S_i\implies|S_i|\geq 3$. □

Satz 2 Sei A eine symmetrische $n\times n$-Matrix mit $a_{ik}\in\{0,1\}$ und $m\geq 3$. Ist $A^2=B=(b_{ik})$ mit $b_{ii}=m$ und $b_{ik}=1$ für $i\neq k$, dann ist $n=m^2-m+1$ und $Spur(A)\neq 0$.

Beweis: Da A symmetrisch ist, gibt es eine Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit $U^{-1}AU=D$.

1. Die Menge der Eigenwerte von A ist $\{d_{ii}|1\leq i\leq n\}$.
2. $Spur(A)=Spur(D)=\sum\limits_{i=1}^{n}d_{ii}$.
3. m ist Eigenwert von A.

Beweis: $\overrightarrow{x}=(1,\dots,1)^T$. Wir zeigen: $A\overrightarrow{x}=m\cdot\overrightarrow{x}$.

Da A symmetrisch ist, ist $\{k|a_{ki}=1\}=\{k|a_{ik}=1\}$.

Da $m=b_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=|\{k|a_{ki}=1\}|=|\{k|a_{ik}=1\}|$.

Also ist $A\overrightarrow{x}=(m,\dots,m)^T=m\overrightarrow{x}$.

4. $f_B=\prod\limits_{i=1}^{n}(d_{ii}^2-x)$.

Beweis: $U^{-1}BU=U^{-1}AAU=U^{-1}AUU^{-1}AU=D^2$.

Also ist $B\approx D^2\implies f_B=f_{D^2}=\prod\limits_{i=1}^{n}(d_{ii}^2-x)$.

5. $f_B=(m+n-1-x)(m-1-x)^{n-1}$.

Beweis: Ersetzt man die erste Spalte durch die Summe aller Spalten in $B-xE$, so erhält man:

$c_{i1} = m+n-1-x$ für $1 \le i \le n$
$c_{ii} = m-x$ für $1 < i$.
$c_{ik} = 1$ sonst

$$B - xE = \begin{pmatrix} m-x & & & 1 \\ & m-x & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & m-x \end{pmatrix}$$

Subtrahiert man die erste Zeile von den übrigen, so erhält man $C' = (c'_{ik})$.
$c'_{11} = m+n-1-x$
$c'_{ii} = m-1-x$ für $i > 1$
$c'_{ik} = 0$ für $i \ne k$.

$$C = \begin{pmatrix} m+n-1-x & & & 1 \\ m+n-1-x & m-x & & \\ & & \ddots & \\ m+n-1-x & 1 & & m-x \end{pmatrix}$$

Dann ist $det(B-xE) = detC = detC' = (m+n-1-x)(m-1-x)^{n-1}$.

$$C' = \begin{pmatrix} m+n-1-x & & & 0 \\ & m-x-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m-x-1 \end{pmatrix}$$

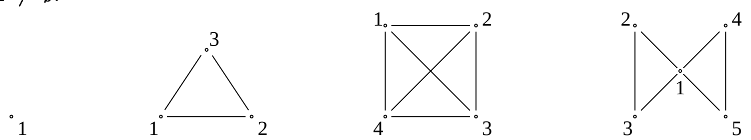
Sei $d_{kk} = m$. Dann ist $m^2 = d_{kk}^2 = m+n-1 \implies n = m^2 - m + 1$.
Für $i \ne k$ ist $d_{ii}^2 = m-1 \implies d_{ii} = \pm\sqrt{m-1}$.
6. Es gibt ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $Spur(A) = m + t\sqrt{m-1}$.
Beweis: $R = \{i | d_{ii} < 0\}$ und $S = \{i | d_{ii} > 0$ und $i \ne k\}$.

$$Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = m + |S|\sqrt{m-1} - |R|\sqrt{m-1} = m + (|S|-|R|)\sqrt{m-1}.$$

7. $Spur(A) \ne 0$.
Beweis: $Spur(A) - m = t\sqrt{m-1} \implies t = 0$ oder $\sqrt{m-1} \in \mathbb{N}$.
Ist $t = 0$, dann ist $Spur(A) = m \ge 3$.
sonst ist $Spur(A) - 1 = \sqrt{m-1}(\sqrt{m-1} + t)$.
Da $m \ge 3$ ist $\sqrt{m-1} > 1 \implies \sqrt{m-1} \ge 2 \implies Spur(A) \ge 1$. □

2.6 Freundschaftsgraphen

Sei P eine Menge von Punkten und $K \subseteq \mathcal{P}_2(P)$. Dann heißt (P, K) **(schleifenloser) Graph**.
Beispiele: Es sei $K \ne \emptyset$.



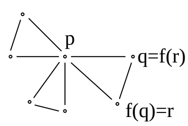
$P = \{1\}$ $\quad$ $P = \{1,2,3\}$, $K = \mathcal{P}_2(P) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ $\quad$ $P = \{1,2,3,4\}$, $K = \mathcal{P}_2(P)$ $\quad$ $P = \{1,2,3,4,5\}$, $K = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{4,5\}\}$

Sei $p \in P$. Dann sei $S_p = \{r | \{p,r\} \in K\}$. S_p ist die Menge der Ecken, die mit p durch eine Kante verbunden sind. $|S_p|$ gibt an, wieviele Kanten von p ausgehen.

Dann gilt:
1. $r \notin S_r$.
2. $r \in S_p \iff p \in S_r$.

Wir nennen (P, K) einen **Freundschaftsgraphen**, wenn gilt:
$(*)$ Für alle $p \ne q$, $p, q \in P$ gibt es genau ein r mit $\{p,r\}, \{q,r\} \in K$.
Anschaulich: Ist $\{p,q\} \in K$, dann nennen wir p und q Freunde.
$(*)$ sagt dann aus, daß $p \ne q$, $p, q \in P$ genau einen gemeinsamen Freund besitzen.
3. Sei (P, K) ein Graph. Dann sind äquivalent:
1. Für alle $p \ne q$ ist $|S_p \cap S_q| = 1$.
2. (P, K) ist Freundschaftsgraph.
3. Für alle $p \ne q$ gibt es genau ein r mit $\{p,q\} \subseteq S_r$.
Beweis: Es gibt genau ein r mit $S_p \cap S_q = \{r\}$.
$\iff$ Es gibt genau ein r mit $\{p,r\}, \{q,r\} \in K$.
$\iff$ Es gibt genau ein r mit $\{r,p\}, \{r,q\} \in K$.
$\iff$ Es gibt genau ein r mit $\{p,q\} \subseteq S_r$.

Wir nennen (P, K) einen **Sterngraph**en, wenn es ein $p \in P$ und $f : P \setminus \{p\} \longrightarrow P \setminus \{p\}$ gibt mit:
a) $f(q) \ne q$, $f(f(q)) = q$ für $q \in P \setminus \{p\}$.
b) $S_p = P \setminus \{p\}$, $S_q = \{p, f(q)\}$ für $q \in P \setminus \{p\}$.



Dann gilt:
4. Jeder Sterngraph ist ein Freundschaftsgraph.
Beweis: Sei $r \ne q$. Wir haben zu zeigen: $|S_r \cap S_q| = 1$.

1. Fall: $p \in S_q \cap S_r$.
Da $p \notin S_p \implies q, r \in P \setminus \{p\}$.
Da $f(f(r)) = r \neq q = f(f(q)) \implies f(r) \neq f(q) \implies S_q \cap S_r = \{p, f(q)\} \cap \{p, f(r)\} = \{p\}$.
2. Fall: $p \notin S_q \cap S_r$.
Dann ist $p = r$ oder $p = q$. Sei o.B.d.A. $r = p$.
Dann ist $S_p \cap S_q = \{f(q)\}$. $\square$

Wir wollen zeigen: Jeder Freundschaftsgraph ist ein Sterngraph.

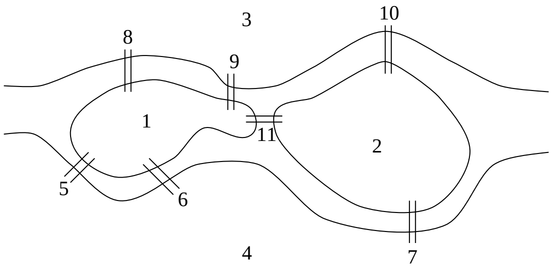
Lemma 1 Sei (P, K) ein Freundschaftsgraph. Gibt es $p, q \in P$ mit $S_p \cup S_q = P$, dann ist (P, K) ein Sterngraph.
Beweis: Da $p \notin S_p$ ist $q \neq p$ und $|P| \geq 2$.
Sei o.B.d.A. $|S_p| \geq |S_q|$.
5. Ist $r \in P$, dann ist $|S_r| \geq 2$.
Beweis: Sei $t \in P \setminus \{r\}$. Dann ist $|S_r \cap S_t| = 1 \implies |S_r| \geq 1$.
Angenommen, $|S_r| = 1$, also $S_r = \{s\}$.
Da für alle $t \in P \setminus \{r\}$ gilt: $|S_r \cap S_t| = 1 \implies s \in S_t$ für $t \in P \setminus \{r\}$
$\implies t \in S_s$ für alle $t \in P \setminus \{r\} \implies S_s = P$ #, da $s \notin S_s$.
6. Für alle $r \in P \setminus \{p\}$ ist $|S_r| = 2$.
Beweis: Ist $r \in P \setminus \{p, q\}$, dann ist $|S_r \cap S_p| = 1$ und $|S_q \cap S_r| = 1$.
Da $P = S_p \cup S_q$ ist $|S_r| = 2$.
Angenommen: $|S_q| \geq 3$.
Da $|S_p| \geq |S_q|$ und $|S_p \cap S_q| = 1$ gibt es $s_1, s_2 \in S_q \setminus S_p,\ s_1 \neq s_2$ und $t_1, t_2 \in S_p \setminus S_q,\ t_1 \neq t_2$.
Nach 3 gibt es $r_1, r_2 \in P$ mit: $\{s_1, t_1\} \subseteq S_{r_1}$ und $\{s_2, t_2\} \subseteq S_{r_2}$.
Es sind $r_1, r_2 \in P \setminus \{p, q\} \implies |S_{r_1}| = |S_{r_2}|$.
$S_{r_1} = \{s_1, t_1\},\ S_{r_2} = \{s_2, t_2\}$. Also $S_{r_1} \cap S_{r_2} = \emptyset$ #
Da $S_p \cup S_q = P$ und $|S_q| = 2$ und $|S_p \cap S_q| = 1 \implies |S_p| = |P \setminus \{p\}|$. Da $p \notin S_p \implies S_p = P \setminus \{p\}$.
Sei $r \neq p$. Da $|S_r| = 2$ und $|S_r \cap S_p| = 1$ sei $f : P \setminus \{p\} \to P$ mit $S_r = \{p, f(r)\}$.
Da $|S_r| = 2$ ist $f(r) \neq p$.
Da $r \notin S_r$ ist $f(r) \neq r$.
Da $f(r) \in S_r$ ist $r \in S_{f(r)} = \{p, f(f(r))\} \implies r = f(f(r))$.
Also ist (P, K) ein Sterngraph. $\square$

Satz 2 Ist (P, K) ein Freundschaftsgraph, dann gibt es $p, q \in P$ mit $S_p \cup S_q = P$.
Beweis: Angenommen, für alle $p, q \in P$ gibt es ein $r \notin S_p \cup S_q$.

Sei o.B.d.A. $P = \{1, \ldots, n\}$ und $A = (a_{ik})$ die Matrix mit $a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in S_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

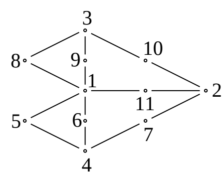
Dann gilt: 1. $a_{ik} = a_{ki}$.
2. Für alle $l \neq k$ gibt es genau ein i mit $a_{li} = 1$ und $a_{ki} = 1$.
3. Für alle k, l gibt es ein i mit $a_{ki} = 0$ und $a_{li} = 0$.
Dann ist $Spur(A) \neq 0$, d.h. es gibt ein i mit $a_{ii} = 1$.
$\implies i \in S_i$ #, da $i \notin S_i$ $\square$.

2.7 Das Königsberger Brückenproblem



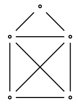
Frage: Gibt es einen Rundgang mit: Jede Brücke wird genau einmal benutzt?

Umformulierung:
1. Man legt auf jedes Territorium (Ufer oder Insel) genau einen Punkt.
2. Man legt auf jede Brücke einen Punkt.
3. Man verbindet den Brückenpunkt mit dem Territoriumspunkt, falls die Brücke auf das Territorium führt.



Frage: Läßt sich diese Figur ohne abzusetzen und ohne eine Kante zweimal zu ziehen zeichnen (wobei Anfangs- und Endpunkt gleich sind)?

Ein ähnliches Problem:



Frage: Kann man diese Figur zeichnen ohne abzusetzen und ohne zweimal eine Kante zu ziehen?

Sei (P, K) ein Graph.

1. Seien $p, q \in P,\ n \in \mathbb{N}$ und $f : \{1, \dots, n\} \to P$ mit
   1. $f(1) = p$ und $f(n) = q$.
   2. $\{f(i), f(i+1)\} \in K$ für $1 \leq i < n$.

   Dann heißt f ein **Weg**.

   Sei $P^f = \{f(i) | 1 \leq i \leq n\}$ und $K^f = \{\{f(i), f(i+1)\} | 1 \leq i < n\}$.
   Anschaulich: Ein Weg ist eine Zeichnung ohne abzusetzen durch die Punkte P^f entlang der Kanten aus K^f.
   Bemerkung: Ist f ein Weg von p nach q und ist $g(i) = f(n+1-i)$ für $1 \leq i \leq n$, so ist g ein Weg von q nach p.
   3. Der Graph (P, K) heißt **zusammenhängend**, wenn es für alle $p,\ q$ einen Weg von p nach q gibt.
   4. Ein Weg von p nach p heißt **Rundweg**.

Lemma 1 Sei f ein Rundweg der Länge n und $p \in P^f = \{f(i) | 1 \leq i \leq n+1\}$. Dann gibt es einen Weg g der Länge n von p nach p mit $K^f = K^g = \{\{g(i), g(i+1)\} | 1 \leq i \leq n\}$.

Beweis: Sei $p = f(i)$. Wie setzen $g(k) = \begin{cases} f(k+i-1) & k+i-1 \leq n+1 \\ f(k+i-(n+1)) & n+1 < k+i \leq n+i \end{cases}$ □

5. Ein Weg f heißt **eulerscher Weg**, wenn $|K^f| = |f| - 1$.
   Anschaulich: Zeichnen ohne abzusetzen und ohne eine Linie zweimal zu ziehen.

Lemma 2 Sei f ein eulerscher Weg von p nach q und $S_r{}^f = \{s | \{r, s\} \in K^f\}$ für $r \in P^f$. Dann gilt:

1. $|S_r{}^f|$ ist gerade für $r \in P \setminus \{p, q\}$.
2. a) Ist $p \neq q$, dann ist $|S_p{}^f|$ und $|S_q{}^f|$ ungerade.
   b) Ist $p = q$, dann ist $|S_p{}^f| = |S_q{}^f|$ gerade.

Beweis: Sei für $1 \leq i \leq n$ $F(i) = \{f(i), f(i+1)\}$. Da f ein eulerscher Weg ist, ist $F : \{i | 1 \leq i \leq n\} \xrightarrow{1-1} K^f$.
Sei $r \in P$. Dann sei $N_r = \{i | 1 < i < n+1,\ f(i) = r\}$.

1. Ist $r \in P \setminus \{p, q\}$, dann ist $|S_r{}^f| = |\{F(i) | r \in F(i)\}| = |\{F(i-1) | i \in N_r\} \uplus \{F(i) | i \in N_r\}| = 2 \cdot |N_r|$.
2. Ist $p \neq q$, dann ist $|S_q{}^f| = |\{F(n-1)\} \uplus \{F(i-1) | i \in N_q\} \uplus \{F(i) | i \in N_q\}| = 2 \cdot |N_q| + 1$.
   $|S_p{}^f| = \ldots = 2 \cdot |N_p| + 1$.
3. Ist $p = q$, dann ist $|S_q{}^f| = |\{F(n-1), F(1)\} \uplus \{F(i-1) | i \in N_q\} \uplus \{F(i) | i \in N_q\}| = 2 \cdot |N_q| + 2$. □

6. Ein eulerscher Weg heißt **voller Weg**, wenn $P^f = P$ und $K^f = K$.

Folgerung 3 Besitzt ein Graph (P, K) einen vollen Rundweg, dann gilt:

1. $|S_r| = |\{s | \{s, r\} \in K\}|$ ist gerade.
2. (P, K) ist zusammenhängend.

Folgerung 3' Gibt es einen vollen Weg von p nach q mit $p \neq q$, dann gilt:

1. a) $|S_r|$ ist gerade für $r \in P \setminus \{p, q\}$.
   b) $|S_q|$ und $|S_p|$ sind ungerade.
2. (P, K) ist zusammenhängend.

Satz 4 Ist (P, K) zusammenhängend und $|S_r|$ gerade für alle $r \in P$, dann gibt es einen vollen eulerschen Rundweg.

Beweis: Seien $f,\ g$ eulersche Wege. Wir schreiben $f < g$, wenn $|K^f| < |K^g|$.

Behauptung 1: f sei ein eulerscher Weg von p nach q. Ist $|S_q{}^f| < |S_q|$, dann gibt es eine eulerschen Weg g mit $f < g$.

Beweis: Sei $s \in S_q \setminus S_q{}^f$. Dann ist $\{q, s\} \in K \setminus K^f$.
Sei $g = f \cup \{\{n+1, s\}\}$, wobei n die Länge von f ist. Dann ist g ein eulerscher Weg mit $g > f$.

Sei f ein maximaler eulerscher Weg bzgl. $<$.

Behauptung 2: f ist ein eulerscher Rundweg.

Beweis: Sei $f(0) = p,\ f(n) = q$.
Nach Behauptung 1 ist $S_q{}^f = S_q$ (da f maximal) $\overset{\text{Voraussetzung}}{\Longrightarrow}$ Also ist $|S_q{}^f|$ gerade $\overset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}$ $p = q$.

Behauptung 3: Für alle $q \in P^f$ ist $S_q{}^f = S_q$.

Beweis: Angenommen, es gibt ein $q \in P^f$ mit $S_q{}^f \subsetneq S_q$.
Nach Behauptung 2 ist f ein Rundweg, also gibt es nach Lemma 1 einen Weg g von q nach q mit $K^f = K^q$ und Länge von g ist gleich Länge von f.
Nach Behauptung 1 gibt es dann ein $h > g$ # zur Maximalität von f.

Behauptung 4: $P^f = P$.

Beweis: Angenommen, es gibt ein $r \in P \setminus P^f$.
Sei p der Anfangspunkt. Da (P, K) zusammenhängend ist, gibt es einen Weg g von p nach r.
Dann gibt es ein kleinstes i mit $g(i+1) \notin P^f$. Dann ist $g(i) = q \in P^f$.
Da $g(i+1) \notin P^f$ ist $g(i+1) \notin S_q{}^f$, also $|S_q{}^f| < |S_q|$ # Behauptung 3

Behauptung 5: $K^f = K$.

Beweis: Sei $\{r, s\} \in K$. Dann ist $r \in P^f$ und $s \in S_r$.
Dann ist $S_r{}^f = S_r$ (nach Behauptung 3) $\Longrightarrow$ $\{r, s\} \in K^f$. □

Folgerung 5 Sei (P, K) ein zusammenhängender Graph. Gibt es $p, q \in P,\ p \neq q$ mit:

1. $|S_q|$ und $|S_p|$ sind ungerade,
2. $|S_r|$ ist gerade für $r \in P \setminus \{p, q\}$,

dann gibt es einen vollen Weg von p nach q.

Beweis: Sei $r \notin P$. Wir setzen $P' = P \cup \{r\}$ und $K' = K \cup \{\{p, r\}, \{r, q\}\}$. Dann ist (P', K') zusammenhängend und $|S'_q|$ ist gerade für alle $q \in P'$. Also gibt es einen vollen Rundweg f in (P', K').

Sei $n + 2$ die Länge von f'.

Nach Lemma 1 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $f'(0) = r$ und $f'(n + 2) = r$.

Dann ist $\{f'(1), f'(n + 1)\} = \{p, q\}$.

Nach Lemma 1 gibt es einen eulerschen Weg g' von $f'(1)$ nach $f'(1)$ mit $K^{f'} = K^{g'}$.

Sei $g = g' \restriction \{1, \ldots, n\}$. Dann ist g ein eulerscher Weg von q nach p oder von p nach q.

Nach der Bemerkung gibt es einen vollen (eulerschen) Weg von p nach q. $\square$

Kapitel 3

Polya-Theorie

3.1 Formale Potenzreihen

Sei R ein Ring. Dann sei $R^{\mathbb{N}} = \{f | f : \mathbb{N} \to R\}$.

a) $f + g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & R \\ i & \mapsto & f(i) + g(i) \end{array} \right.$ b) $f \cdot g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & R \\ n & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{n} f(i)g(n-i) \end{array} \right.$

Sei $a \in R$. dann sei $f_a : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & R \\ i & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{für } i = 0. \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array} \right.$ Statt f_a schreibt man auch a.

Dann ist $(R^{\mathbb{N}}, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring. Man nennt $R^{\mathbb{N}}$ den **formalen Potenzreihenring** über R.

1. Ist $f + g = 0$, dann schreibt man für g auch $-f$.
   Ist $f \cdot g = 1$, dann schreibt man für g auch f^{-1} oder $\frac{1}{f}$.

   Beispiel: $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 1 \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } n = 0 \\ -1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array} \right.$

   Behauptung: $f \cdot g = 1$.

   Beweis: $(f \cdot g)(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(i)g(n-i)$

   $\Longrightarrow \ (f \cdot g)(0) = \sum\limits_{i=0}^{0} f(i)g(0-i) = f(0) \cdot g(0) = 1.$

   $n > 0 : \ (f \cdot g)(n) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(i)g(n-i) = f(n) \cdot g(0) + f(n-1) \cdot g(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0,$

   also ist $(f \cdot g) : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow f \cdot g = 1 \Longrightarrow f = \frac{1}{g}.$ $\square$

2. Sei $f \in R^{\mathbb{N}}$. $f^0 := 1$, $f^{n+1} := (f^n) \cdot f$.

   Beispiel 1: Sei $x : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & R \\ i & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array} \right.$. Dann ist $x^n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & R \\ i & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & i = n. \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array} \right.$

   Beweis: (vollständige Induktion)

   $n = 0 : \ \surd$

   $n \to n+1 : \ x^{n+1}(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} x^n(i)x(k-i) = x^n(k-1)\underbrace{x(1)}_{1} \overset{\text{IV}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } k = n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$ $\square$

   Beispiel 2: $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & 1 \end{array} \right.$

   Behauptung: $f^n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ r & \mapsto & \binom{n+r-1}{r} \end{array} \right.$

   Beweis: (vollständige Induktion über n)

   $n = 1 : \ f^n = f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ r & \mapsto & 1 = \binom{r}{r} \end{array} \right.$

   $n \to n+1$: Dann ist nach IV $f^n(r) = \binom{n+r-1}{r}$.

   Wir zeigen durch vollständige Induktion über s : $f^{n+1}(s) = \binom{n+s}{s} = \binom{(n+1)+s-1}{s}$.

$$f^{n+1}(s) = \sum_{r=0}^{s} f^n(r)\cdot f(s-r) = \sum_{r=0}^{s} f^n(r)\cdot 1 = \sum_{r=0}^{s} f^n(r).$$

Ist $s=0$: $f^{n+1}(s) = \sum_{r=0}^{0} f^n(r) = f^n(0) = 1$.

sonst: $f^{n+1}(s+1) = \sum_{r=0}^{s+1} f^n(r) = \left(\sum_{r=0}^{s} f^n(r)\right) + f^n(s+1) = f^{n+1}(s) + f^n(s+1)$

$\stackrel{\text{IV}}{=} \binom{n+s}{s} + \binom{n+(s+1)-1}{s+1} = \binom{n+s}{s} + \binom{n+s}{s+1} = \binom{n+s+1}{s+1}$. □

3. Sind $a_0, \ldots, a_n \in R$, dann gilt: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & R \\ i & \mapsto & \begin{cases} a_i & \text{für } i \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

Deshalb schreiben wir auch für $f \in R^{\mathbb{N}}$ $\sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i$.

Wir haben gezeigt:

1. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$.
2. $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+1-i}{i} x^i$.

Statt $R^{\mathbb{N}}$ schreibt man auch $R[[x]]$.
Es gibt viele kombinatorische Anzahlprobleme, die von einem $i \in \mathbb{N}$ abhängen, z.B.:

Sei $f(i)$ die Anzahl der Permutationen einer Menge D mit $|D| = i$. Dann ist $f(i) = i!$.

Die **kombinatorische Folge** zu diesem Problem ist $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & i! \end{cases}$. Dafür schreibt man auch $\sum_{i=0}^{\infty} i!x^i$.

Beispiel: Sei D eine Menge von Dingen mit $|D| = n$, die sich in einer Urne befinden. Man zieht nacheinander i Dinge, die man sofort wieder zurücklegt: Eine Ziehung ist also eine Funktion $Z : \{1, \ldots, i\} \to D$.
Zwei Ziehungen Z, Y sollen äquivalent sein, wenn es ein $\sigma \in S_{\{1,\ldots,i\}}$ gibt mit $Y = Z \circ \sigma$. $\tilde{Y} = \{Z | Y \sim Z\}$.

Sei $f_D : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & |\{\tilde{Y} | Y : \{1, \ldots, i\} \to D\}| \end{cases}$

Dann ist f_D die kombinatorische Funktion zu dem Problem: "Ziehung von i Dingen aus D".

Ist $D = \{a\}$, dann ist $f_D = f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & 1 \end{cases}$

Behauptung: $f_D = f^{|D|}$.
Beweis: (Induktion über $|D|$)

Ist $|D| = 0$, dann ist $f_D = f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} = f^0 = f^{|D|}$.

Sei $|D| > 0$. Sei $a \in D$ und sei $D_1 = \{a\}$, $D_2 = D \setminus \{a\}$.

Nach IV ist $f_{D_1} = f$ und $f_{D_2} = f^{|D_2|} = f^{|D|-1}$.

Die Ziehung von k-vielen Dingen aus D setzt sich zusammen aus der Ziehung von i-vielen Dingen aus D_1 und $k-i$-vielen Dingen aus D_2, und zwar ist $f_D(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{D_1}(i) \cdot f_{D_2}(k-i)$, also ist $f_D = f_{D_1} \cdot f_{D_2} = f^1 \cdot f^{|D|-1} = f^{|D|}$.

Also ist $f_D : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & \binom{|D|+i-1}{i} \end{cases}$ □

3.2 Erzeugende Funktionen

Sei $f = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i \in \mathbb{R}[[x]]$. Dann ist $I_f = \{p \in \mathbb{R} | \sum_{i=0}^{\infty} f(i)p^i \text{ konvergiert}\}$.

Ist $I_f \neq \{0\}$, dann nennt man $F_f : \begin{cases} I_f & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(i)p^i \end{cases}$ **erzeugende Funktion** von f.

Für F_f schreibt man auch $\sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i$.

Besitzt f eine erzeugende Funktion F_f, dann ist $f(i) = \frac{F_f^{(i)}(0)}{i!}$.

Beispiel: Sei $f = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Dann ist $I_f = (-1, 1)$ und $F_f : \begin{cases} (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \sum_{i=0}^{\infty} r^i \end{cases} = \frac{1}{1-r}$.

Also ist $F_f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Sei $g = f^m$. Dann ist $F_g(x) = (F_f(x))^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m = (1-x)^{-m}$.

Also ist $g(i) = \frac{F_g^{(i)}(0)}{i!}$. $g(i) = (-1)^i \binom{-m}{i} := (-1)^i \frac{(-m)\cdot(-m-1)\cdot\ldots\cdot(-m-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} = \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!} = \binom{m+i-1}{i}$.

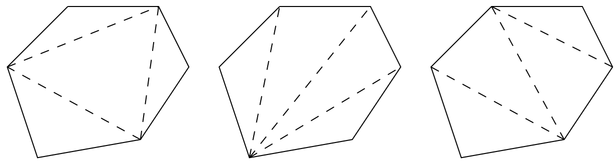
Für jedes m bedeutet $g(m)$ die Anzahl der Möglichkeiten, ein Produkt von m Zahlen vollständig zu klammern.

$m = 0:$ $g(0) = 0$ $\{\}$
$m = 1:$ $g(1) = 1$ $\{(a_1)\}$
$m = 2:$ $g(2) = 1$ $\{(a_1 a_2)\}$
$m = 3:$ $g(3) = 2$ $\{(a_1 a_2)a_3, a_1(a_2 a_3)\}$

Gesucht ist eine Funktion $g(m)$ mit:

1. $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$.
2. Für $n > 1$ ist $g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \cdot g(n-k)$.

Wir wollen zeigen: $g(n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}$ für $n \geq 1$.
Wir nehmen an, daß g eine erzeugende Funktion ist, d.h. der Konvergenzradius von $G = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n$ ist größer als Null.



Katalanische Zahlen:
Gegeben ist ein n-Eck. Auf wieviele Arten kann man dieses n-Eck so in Dreiecke zerlegen, daß sich die Verbindungslinien nicht überschneiden?

Behauptung: $G^2(x) - G(x) + x = 0$.

Beweis: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k)\right)x^n \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n - x.$

$$(*)\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) \begin{cases} 0 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{für } n=1 \\ g(n) & \text{für } n>1 \end{cases} \\ \sum_{k=0}^{0} g(k)g(0-k) = g(0)g(0) = 0, \quad \sum_{k=0}^{1} g(k)g(1-k) = g(0)g(1) + g(1)g(0) = 0. \\ \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k)g(n-k) = g(n). \end{cases}$$

$\Longrightarrow \ (G(x) - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - x \ \Longrightarrow \ G(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x})$.

Die Taylor-Reihe von $\sqrt{1-x}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, und für $n > 1$ ist $a_n = (-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{1}{2} - i\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(-2)^n}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\left(\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1)\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}2i\right)(2n-1)}{\left(\prod_{i=1}^{n-1}2i\right)(2n-1)} = \frac{1}{n!2^n}\frac{-1\cdot\left(\prod_{i=1}^{2n-2}i\right)\cdot(2n-1)}{2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}i\right)\cdot(2n-1)}$$

$$= \frac{-1}{n!2^n}\frac{(2n-1)!2}{(2n-1)2^n(n-1)!} = \frac{-2}{4^n(2n-1)}\binom{2n-1}{n-1}.$$

Dann ist die Taylor-Reihe von $\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)(4x)^n$.

$$\Longrightarrow b(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ -2 & \text{für } n=1 \\ -\frac{2}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} & \text{für } n>1 \end{cases}$$

Die Potenzreihe für $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4x})$ sei gleich $\sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$ mit $c(1) = \frac{1}{2}b(1) = -1 \ \Longrightarrow \ g \neq c$.

Die Potenzreihe für $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ sei gleich $\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n$ mit $d(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n=0 \\ 1 & \text{für } n=1 \\ \frac{1}{2}(-b(n)) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} & \text{für } n>1 \end{cases}$

Da $G(x)$ die Gleichung $G(x)^2 - G(x) + x = 0$, erfüllt, ist $d(n) = \sum_{k=1}^{n-1} d(k)d(n-k)$, also ist $g = d$. □

Beispiel: Leonard von Pisa (genannt Fibonacci, ca. 1180 bis ca. 1250) stellte folgende Aufgabe:
Das Weibchen eines Kaninchenpaares wirft nach Vollendung des 2. Lebensmonats allmonatlich ein neues Kaninchenpaar. Man berechne die Anzahl $f(n)$ der Kaninchenpaare im n-ten Monat, wenn im 0-ten Monat genau ein neugeborenes Kaninchenpaar vorhanden ist.
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ (alte Kaninchen + neugeborene Kaninchen)
Wir nehmen an, daß f eine erzeugende Funktion $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ besitzt.

Behauptung: f besitzt eine erzeugende Funktion.
Beweis: (Quotientenkriterium)

Sei $|p| < \frac{1}{2}$. Dann ist $\left|\frac{f(n+1)p^{n+1}}{f(n)p^n}\right| = \frac{f(n+1)}{f(n)} \cdot |p| = \frac{f(n)+f(n-1)}{f(n)} \cdot |p| \leq \frac{2f(n)}{f(n)} \cdot |p| < 1$. □

Es gilt: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f(n+2)x^{n+2} = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty}(f(n+1) + f(n))x^{n+2}$

$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)x^{n+2} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^{n+1} + x^2F(x) = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n + x^2F(x)$

$= 1 + xF(x) + x^2F(x)$.

$\Longrightarrow \ 1 = F(x)(1 - x - x^2) \ \Longrightarrow \ F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Gesucht ist die Reihenentwicklung von $\frac{1}{1-x-x^2}$.

Behauptung: Sei $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2 x}\right)$

Beweis: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{5}$, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2 x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 x}{1^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2 x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{1-1x-1x^2}\right) = \frac{1}{1-x-x^2} = F(x).$$

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1 x} = \sum_{i=0}^{\infty} {\alpha_1}^{i+1} x^i, \quad \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2 x} = \sum_{i=0}^{\infty} {\alpha_2}^{i+1} x^i \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left({\alpha_1}^{i+1} - {\alpha_2}^{i+1}\right)x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^{i+1} - {\alpha_2}^{i+1}\right)x^i.$$

Also ist $f(i) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left({\alpha_1}^{i+1} - {\alpha_2}^{i+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right]$. □

Diese Zahlen heißen **Fibonacci-Zahlen**.

$$f(7) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8\right] = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^8}\left(1 + \binom{8}{1}\sqrt{5} + \binom{8}{2}\sqrt{5}^2 + \binom{8}{3}\sqrt{5}^3 + \ldots - 1 + \binom{8}{1}\sqrt{5} - \binom{8}{2}\sqrt{5}^2 + \binom{8}{3}\sqrt{5}^3 - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^8}\left[2\binom{8}{1}\sqrt{5} + 2\binom{8}{3}\sqrt{5}^3 + 2\binom{8}{5}\sqrt{5}^5 + 2\binom{8}{7}\sqrt{5}^7\right] = \frac{1}{2^7}\left[\binom{8}{1} + \binom{8}{3}\cdot 5 + \binom{8}{5}\cdot 5^2 + \binom{8}{7}\cdot 5^3\right] = 21$$

Beispiel: In einer Ebene sind n Geraden gezeichnet mit folgenden Zusatzbedingungen:

1. Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
2. In einem Punkt schneiden sich höchstens 2 Geraden.

Gesucht ist sie Anzahl $f(n)$ der Gebiete, in welche die Ebene zerlegt wird.

$f(0) = 1 \qquad f(1) = 2 \qquad f(2) = 4 \qquad f(3) = 7 \qquad \ldots$

Kommt zu n Geraden einer Ebene eine weitere Gerade hinzu, so entstehen n neue Schnittpunkte. Die Schnittpunkte teilen die Gerade in $n+1$ Segmente. Jedes Segment teilt ein Gebiet in zwei Teilgebiete.
Also ist $f(n+1) = f(n) + n + 1$ für $n \geq 1$.

Annahme: f besitzt eine erzeugende Funktion $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i$.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f(i)x^i = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} f(i+1)x^{i+1} = 1 + x\sum_{i=0}^{\infty}(f(i) + i + 1)x^i$$

$$= 1 + x\left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i)x^i + \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$F(x) = 1 + x\left(F(x) + \frac{1}{(1-x)^2}\right) \Longrightarrow F(x)(1-x) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i + x\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i-1}{i}x^i.$$

$$\binom{3+i-1}{i} = \binom{i+2}{i} = \binom{i+2}{2} = \frac{(i+2)(i+1)}{2}.$$

$$\Longrightarrow F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(i+1)i}{2}\right)x^i \Longrightarrow f(i) = \frac{i^2+i+2}{2}.$$ □

3.3 Zusammengesetzte kombinatorische Folgen

Gegeben sei eine Menge D von Dingen. Jedem $a \in D$ sei ein Wert $w(a)$ zugeordnet. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}^D$ aller Funktionen von D nach $\mathbb{N}$.
Gesucht ist die **kombinatorische Folge**: $f_D(m) = |\{g \in \mathbb{N}^D \mid \sum_{a\in D} g(a)w(a) = m\}|$

Lemma 1 Sind D_1, D_2 Mengen von Dingen mit $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, dann ist $f_{D_1 \cup D_2} = f_{D_1} \cdot f_{D_2}$.

Beweis: Sei $D = D_1 \cup D_2$.

$$f_D(m) = \left|\left\{g \in \mathbb{N}^D \mid \sum_{a\in D} g(a)w(a) = m\right\}\right| = \sum_{k=0}^{m}\left|\left\{g \in \mathbb{N}^D \mid \sum_{a\in D_1} g(a)w(a) = k \text{ und } \sum_{a\in D_2} g(a)w(a) = m-k\right\}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left|\left\{g_1 \cup g_2 | g_1 \in \mathbb{N}^{D_1} \text{ und } \sum_{a\in D_1} g_1(a)w(a) = k,\ g_2 \in \mathbb{N}^{D_2} \text{ und } \sum_{a\in D_2} g_2(a)w(a) = m-k\right\}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left|\left\{g_1 \in \mathbb{N}^{D_1} \mid \sum_{a\in D_1} g_1(a)w(a) = k\right\}\right| \cdot \left|\left\{g_2 \in \mathbb{N}^{D_2} \mid \sum_{a\in D_2} g_2(a)w(a) = m-k\right\}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{m} f_{D_1}(k) \cdot f_{D_2}(m-k).$$

Also ist $f_D = f_{D_1} \cdot f_{D_2}$. □

Lemma 2 Ist $D = \{a\}$, dann ist $f_D = \frac{1}{1-x^{w(a)}}$.

Beweis: $f_D(m) = |\{g | w(a)g(a) = m\}| = \begin{cases} 1 & \text{falls } w(a)|m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} f_D(m)x^m = \sum_{\substack{m=0 \\ w(a)|m}}^{\infty} x^m \overset{k=\frac{m}{w(a)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kw(a)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{w(a)}\right)^k = \frac{1}{1-x^{w(a)}}$. □

Satz 3 $f_D = \prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^{w(a)}}$.

Beweis: (vollständige Induktion über $|D|$)

Ist $D = \emptyset$, dann ist $f_D(m) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$|D| > 0$. Sei $a \in D,\ D_1 = \{a\},\ D_2 = D \setminus \{a\}$, dann ist $f_D = f_{D_1} \cdot f_{D_2} = \frac{1}{1-x^{w(a)}} \cdot f_{D_2} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{1-x^{w(a)}} \prod_{a\in D_2} \frac{1}{1-x^{w(a)}}$

$= \prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^{w(a)}}$. □

Wir wollen ein Verfahren angeben, wie man $f_D(m)$ berechnen kann:

1. $|D| = n$. Dann gibt es ein $\sigma : \{i|i < n\} \overset{1-1}{\to} D$.
   Wir setzen $E = \{i|i < n\}$ und $\omega(i) := w(\sigma(i))$.
   Dann ist $f_E(m) = f_D(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.
2. Man setzt $E_i = \{j|j < i\}$ und $f_i = f_{E_i}$. Dann gilt:
   (a) $f_0 = 1$
   (b) $f_{i+1} = f_i \cdot f_{\{i\}}$.
   (c) $f_n = f_E = f_D$.
3. $f_{\{i\}} = \frac{1}{1-x^{\omega(i)}}$.
   Also ist $f_{i+1} = f_i \cdot \frac{1}{1-x^{\omega(i)}} \implies f_{i+1} - x^{\omega(i)} f_{i+1} = f_i \implies f_{i+1} = f_i + x^{\omega(i)} f_{i+1}$.
   $\sum_{m=0}^{\infty} f_{i+1}(m)x^m = \sum_{m=0}^{\infty} f_i(m)x^m + \sum_{m=0}^{\infty} f_{i+1}(m)x^{m+\omega(i)} = \sum_{m=0}^{\omega(i)-1} f_i(m)x^m + \sum_{m=\omega(i)}^{\infty} (f_i(m) + f_{i+1}(m-\omega(i)))\,x^m$.
   Man erhält folgende Rekursionsformel:
   $f(0,m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   $f(i+1,m) = \begin{cases} f(i,m) & \text{für } m < \omega(i) \\ f(i,m) + f(i+1, m-\omega(i)) & \text{sonst} \end{cases}$
   Dann ist $f(n,m) = f_n(m) = f_E(m) = f_D(m)$.

```
 10 DIM A(10000)  : A(0)=1  : DIM W(10)
 15 REM Eingabe
 20 N=6  : M=100
 50 W(0):=50  : W(1)=20  : W(2)=10  : W(3)=5  : W(4)=2  : W(5)=1
100 REM Programm
120 A(K+W(I))=A(K+W(I))+A(K)
130 K=K+1  : IF K+W(I)>M THEN K=0  : I=I+1  : IF I=N THEN GOTO 210
140 GOTO 120
200 REM Ausgabe
210 FOR K=0 TO M  : PRINT K;A(K)  : NEXT K
```

Dann ist `A(K)`$= f(6,k) = f_D(k)$ für $k \le 100$.

Beispiel 1: Gegeben sei eine Menge D von Dingen mit $|D| = n$.

Wir hatten $Z : \{i|i < n\} \to D$ eine Ziehung von n Dingen genannt.

Wir nennen Z äquivalent zu Y, wenn es ein $\sigma \in S_{\{i|i<n\}}$ gibt mit $Z = Y \circ \sigma$. $\tilde{Z} = \{Y|Z \circ \sigma = Y\}$.

$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ m & \mapsto & |\{\tilde{Y}|Y \text{ ist eine Ziehung von } m \text{ Dingen}\}| \end{cases}$

Jeder Ziehung Z ordnen wir eine Funktion $g_Z : \begin{cases} D & \to & \mathbb{N} \\ a & \mapsto & |\{j < n|Z(j) = a\}| \end{cases}$ zu (den Index der Ziehung.)

Dann gilt:

1. $Y \sim Z$ gdw. $g_Z = g_Y$.
2. Ist $g : D \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{a\in D} g(a) = m$, dann gibt es eine Ziehung Z von m Dingen mit $g_Z = g$.

$f(m) = |\{g \in \mathbb{N}^D \mid \sum_{a\in D} g(a) = m\}|$

Setzt man $w(a) = 1\ \forall a \in D$, dann erhält man $f(m) = f_D(m)$.

Also ist $f = \prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^{w(a)}} = \frac{1}{(1-x)^n}$.

Beispiel 2: Sei $D = \{i|1 \le i \le m\}$. Wir nennen eine Funktion $Z : D \to \mathbb{N}$ eine Zerlegung von m, wenn $\sum_{i=1}^{m} Z(i) = m$.

Zwei Zerlegungen Z, Y heißen äquivalent, wenn es ein $\sigma \in S_{\{i|1\le i\le m\}}$ gibt mit $Y = Z \circ \sigma$.

Sei $\tilde{Y} = \{Z|Z \sim Y\}$. Gesucht ist $f(m) = |\{\tilde{Y}|Y \text{ ist eine Zerlegung von } m\}|$.

Sei Z eine Zerlegung von m. Dann sei $g_Z : \begin{cases} \{i|1 \le i \le m\} & \to & \mathbb{N} \\ i & \mapsto & |\{j|Z(j) = i\}| \end{cases}$

Dann gilt:

1. $Y \sim Z$ gdw. $g_Y = g_Z$.
2. Ist $g : \{i|1 \le i \le m\} \to \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{m} g(i) \cdot i = m$, dann gibt es eine Zerlegung Z mit $g_Z = g$.

Also ist $f(m) = \left|\left\{g \in \mathbb{N}^{\{i|1\le i\le m\}} \mid \sum_{i=1}^{m} g(i) \cdot i = m\right\}\right|$.

Wir setzen $w(i) = i$ und erhalten $f(m) = \left|\left\{g \in \mathbb{N}^{\{i|1\le i\le m\}} \mid \sum_{i=1}^{m} g(i)w(i) = m\right\}\right|$.

Also ist $f = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^{w(i)}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-x^i}$.

Beispiel:

	$Z(1)$		$Z(2)$		$Z(3)$		$Z(4)$		$Z(5)$			
Z_1 :	1	+	1	+	1	+	1	+	1	=	5	
Z_2 :	1	+	1	+	1	+	2	+	0	=	5	
Z_3 :	1	+	1	+	3	+	0	+	0	=	5	
Z_4 :	1	+	4	+	0	+	0	+	0	=	5	
Z_5 :	1	+	2	+	2	+	0	+	0	=	5	
Z_6 :	2	+	3	+	0	+	0	+	0	=	5	
Z_7 :	0	+	3	+	0	+	1	+	1	=	5	$\sim Z_3$

Beispiel 3: In der Schweiz gibt es 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Rappen Münzen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Franken zu wechseln?

Eine Funktion $Z : \{i|i < k\} \to D = \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$ heißt Zerlegung des Betrages m, wenn $\sum_{i=0}^{k-1} Z(i) = m$.

Zwei Zerlegungen des Betrages m heißen äquivalent, wenn es ein $\sigma \in S_{Vb\ Z}$ gibt mit $Z = Y \circ \sigma$.

Sei $\tilde{Y} = \{Z|Z \sim Y\}$. Gesucht ist $f(m) = |\{\tilde{Z}|Z$ ist eine Zerlegung des Betrages $m\}|$.

Wieder betrachtet man den "Index von $\tilde{Z}$" $g_Z : \left\{\begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{N} \\ a & \mapsto & |\{j|Z(j) = a\}| \end{array}\right.$

Dann gilt:

1) $Z \sim Y \iff g_Z = g_Y$.

2) Ist $g : D \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{a\in D} a \cdot g(a) = m$, dann gibt es eine Zerlegung Z des Betrages m mit $g_Z = g$.

Also ist $f(m) = |\{g|g : D \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{a\in D} g(a) \cdot a = m\}|$,

mit $w(a) = a$ ist dann $f(m) = |\{g|g : D \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{a\in D} g(a)w(a) = m\}|$.

Nach Satz 3 ist dann $f = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)x^m = \prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^{w(a)}} = \prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^a}$.

$\prod_{a\in D} \frac{1}{1-x^a}$ läßt sich rekursiv berechnen, man erhält $f(100) = 4562$.

3.4 Zykelindex einer Permutation

Sei D eine Menge mit $|D| = n$ und es gelte für $\mathfrak{D} \subset \mathcal{P}(D)$:

1. $A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathfrak{D}$
2. $A \cap B = \emptyset$ für $A \neq B,\ A, B \in \mathfrak{D}$
3. $\bigcup \mathfrak{D} \subseteq D$.

$\mathfrak{D}$ heißt **Partition** von D, wenn $\bigcup \mathfrak{D} = D$.

Gesucht ist $f_{\mathfrak{D}}(m) = |\{\bigcup \mathfrak{L}|\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D},\ |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}|$.

Beispiel: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},\ \mathfrak{D} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 7\}, \{6\}\}$.

$f_{\mathfrak{D}}(0) = |\{\{\emptyset\}\}| = 1$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(1) = |\{\{1\}, \{6\}\}| = 2$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(2) = |\{\{2, 3\}, \{1, 6\}\}| = 2$

$f_{\mathfrak{D}}(3) = |\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 7\}\}| = 3$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(4) = 3$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(5) = 2$

$f_{\mathfrak{D}}(6) = 2$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(7) = 1$ $\quad f_{\mathfrak{D}}(n) = 0$ für $n \ge 8$

Wir ordnen der Partition $\mathfrak{D}$ die Funktion $g_{\mathfrak{D}} : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ i & \mapsto & |\{A \in \mathfrak{D}|\ |A| = i\}| \end{array}\right.$ zu.

Im Beispiel: $g_{\mathfrak{D}}(0) = 0,\ g_{\mathfrak{D}}(1) = 2,\ g_{\mathfrak{D}}(2) = 1,\ g_{\mathfrak{D}}(3) = 1,\ g_{\mathfrak{D}}(n) = 0$ für $n \ge 4$.

Lemma 1 $\sum_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m = \prod_{i=1}^{|D|=n} (1 + x^i)^{g_{\mathfrak{D}}(i)}$.

Beweis: (Induktion über $|D|$)

Ist $\mathfrak{D} = \emptyset$, dann ist $g_{\mathfrak{D}}(i) = 0$ für alle i. $\prod_{i=1}^{n} (1 + x^i)^{g_{\mathfrak{D}}(i)} = 1 = \sum_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m$.

$|\mathfrak{D}| > 0$. Sei $A \in \mathfrak{D}$ und $k = |A|$ und sei $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \setminus \{A\}$.

$$g_{\mathfrak{D}'}(i) = \left\{\begin{array}{ll} g_{\mathfrak{D}}(i) - 1 & \text{für } i = k \\ g_{\mathfrak{D}}(i) & \text{sonst} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{D}}(m) &= |\{\bigcup \mathfrak{L}|\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D} \text{ und } |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}| = |\{\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}|\ |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}| \\ &= |\{\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}|A \in \mathfrak{L} \text{ und } |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}| + |\{\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}|A \notin \mathfrak{L} \text{ und } |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}| \end{aligned}$$

$$= |\{\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}' \mid |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}| + |\{\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}' \mid |\bigcup \mathfrak{L}| = m-k\}| = \begin{cases} f_{\mathfrak{D}'}(m) + f_{\mathfrak{D}'}(m-k) & \text{für } k \leq m \\ f_{\mathfrak{D}'}(m) & \text{für } k > m \end{cases}$$

Also ist $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m = \sum\limits_{m=0}^{k-1} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m + \sum\limits_{m=k}^{\infty} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m = \sum\limits_{m=0}^{k-1} f_{\mathfrak{D}'}(m)x^m + \sum\limits_{m=k}^{\infty} \left(f_{\mathfrak{D}'}(m) + f_{\mathfrak{D}'}(m-k)\right) x^m$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}'}(m)x^m + x^k \sum_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}'}(m)x^m = (1+x^k) \sum_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}'}(m)x^m \overset{\text{IV}}{=} (1+x^k) \prod_{i=1}^{n} \left(1+x^i\right)^{g_{\mathfrak{D}'}(i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1+x^i\right)^{g_{\mathfrak{D}}(i)}. \qquad \square$$

Dies kann man sich wie folgt merken:

Man nennt $I_{\mathfrak{D}} = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{g_{\mathfrak{D}}(i)} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ den **Index von** $\mathfrak{D}$.

Das Ersetzen von $(1+x^i)$ für x_i in $I_{\mathfrak{D}}$ nennt man die **Polyasche Einsetzung**. Man erhält $f_{\mathfrak{D}} = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1+x^i\right)^{g_{\mathfrak{D}}(i)}$.

Unser Beispiel:

$g_{\mathfrak{D}}(1) = 2,\ g_{\mathfrak{D}}(2) = 1,\ g_{\mathfrak{D}}(3) = 1,\ g_{\mathfrak{D}}(i) = 0$ für $i > 3$.

Der Index von $\mathfrak{D}$ ist also ${x_1}^2 \cdot {x_2}^1 \cdot {x_3}^1$.

Polyasche Einsetzung liefert: $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{\mathfrak{D}}(m)x^m = (1+x)^2(1+x^2)(1+x^3) = 1+2x+2x^2+3x^3+3x^4+2x^5+2x^6+x^7$.

Also ist $f_{\mathfrak{D}}(0) = f_{\mathfrak{D}}(7) = 1,\ f_{\mathfrak{D}}(1) = f_{\mathfrak{D}}(2) = f_{\mathfrak{D}}(5) = f_{\mathfrak{D}}(6) = 2,\ f_{\mathfrak{D}}(3) = f_{\mathfrak{D}}(4) = 3$.

Sei nun $\tau \in S_D$ eine Permutation von D. Wir setzen: $f_\tau(m) = |\{A | \tau[A] = A \text{ und } |A| = m\}|$

Lemma 2 Zu jeder Permutation $\tau \in S_D$ gibt es eine Partition $\mathfrak{D}_\tau$ von D mit:

1. $\tau[A] = A$ für jedes $A \in \mathfrak{D}_\tau$.
2. $A \in \mathfrak{D}_\tau,\ B \subseteq A,\ \tau[B] = B \implies B = \emptyset$ oder $B = A$.

Beweis: Sei $< \tau >= \{\tau^n | n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:

a) $< \tau >$ ist eine Untergruppe von S_D.

Da S_D endlich ist, gibt es m, k mit $m < k$ und $\tau^m = \tau^k \implies \tau^{k-m} = id_D$.

Wir setzen $a \sim b \iff \exists \sigma \in < \tau >$ mit $\sigma(a) = b$.

b) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $\tilde{a} = \{b | a \sim b\},\ \mathfrak{D}_\tau = \{\tilde{a} | a \in D\}$.

zu 1) Sei $c \in \tau(\tilde{a})$. Dann gibt es ein $b \in \tilde{a}$ mit $c = \tau(b) \implies a \sim b$ und $b \sim c \implies a \sim c \implies c \in \tilde{a}$.

zu 2) $A \subseteq \tilde{a},\ A \neq \emptyset$ und $\tau[A] = A$. Z.z.: $A = \tilde{a}$.

Sei $b \in A$. Dann ist $b \sim a \implies \tilde{b} = \tilde{a}$, z.z.: $A = \tilde{b}$.

Ist $A \neq \tilde{b}$, so ist z.z.: $\tau[A] \neq A$.

Sei $N_A = \{b | \tau(b) \notin A\}$. Dann ist $N_A \neq \emptyset$, da $A \neq \tilde{b}$.

Sei n das kleinste Element von N_A : $c = \tau^{n-1}(b) \in A$ und $\tau(c) = \tau^n(b) \notin A$, also $\tau[A] \neq A$. $\square$

<u>Beispiel</u> $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 7)(6)$.

$\mathfrak{D}_\tau = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,7\}, \{6\}\}$.

Folgerung 3 $f_\tau(m) = f_{\mathfrak{D}_\tau}(m) = |\{\bigcup \mathfrak{L} | \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}_\tau \text{ mit } |\bigcup \mathfrak{L}| = m\}|$.

Beweis: Es genügt z.z.: Es sind äquivalent:

1. $\tau[A] = A$
2. Es gibt $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}_\tau$ mit $\bigcup \mathfrak{L} = A$

<u>1 ⇒ 2</u>: $\mathfrak{L} = \{B \in \mathfrak{D}_\tau | B \cap A \neq \emptyset\} \implies \bigcup \mathfrak{L} \supseteq A$.

Sei $B \in \mathfrak{L}$, dann ist $\tau[B] = B$, also $\tau[A \cap B] = A \cap B$.

Da $A \cap B \neq \emptyset$, so ist nach Lemma 2 $A \cap B = B \implies B \subseteq A \implies \bigcup \mathfrak{L} \subseteq A$.

<u>2 ⇒ 1</u>: $\tau[A] = \tau[\bigcup \mathfrak{L}] = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{L}} \tau[B] = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{L}} B = \bigcup \mathfrak{L} = A$. $\square$

Man kann also f_τ wie folgt berechnen:

1. Man berechnet $\mathfrak{D}_\tau$.
2. Man setzt den Index von $\mathfrak{D}_\tau$ $\quad I_{\mathfrak{D}_\tau} = \prod\limits_{i=1}^{n} {x_i}^{g_{\mathfrak{D}_\tau}(i)} =: I_\tau$ und nennt I_τ den **Zykelindex** von τ.
3. Die Polyasche Einsetzung von $(1+x^i)$ für x_i liefert $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_\tau(m)x^m = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1+x^i\right)^{g_{\mathfrak{D}_\tau}(i)}$.

<u>Beispiel</u> $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 7)(6)$.

1. $\mathfrak{D}_\tau = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,7\}, \{6\}\}$.
2. $I_\tau = I_{\mathfrak{D}_\tau} = \prod\limits_{i=1}^{n} {x_i}^{g_{\mathfrak{D}_\tau}(i)} = x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3$.
3. Die Polyasche Einsetzung liefert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_\tau(m)x^m = (1+x)^2(1+x^2)(1+x^3) = 1+2x+2x^2+3x^3+3x^4+2x^5+2x^6+x^7$.

Also ist	$f_\tau(0)=1$	$\emptyset$	$f_\tau(1)=2$	$\{1\},\{6\}$
	$f_\tau(2)=2$	$\{2,3\},\{1,6\}$	$f_\tau(3)=3$	$\{4,5,7\},\{1,2,3\},\{2,3,6\}$
	$f_\tau(4)=3$	$\{1,4,5,7\},\{4,5,6,7\},\{1,2,3,6\}$	$f_\tau(5)=2$	$\{2,3,4,5,7\},\{1,4,5,6,7\}$

3.5 Polyasches Aufzählungstheorem

Sei D eine Menge mit $|D|=n$.
Wir hatten $\mathcal{P}_m(D)=\{A\subseteq D \mid |A|=m\}$ gesetzt und gezeigt: $|\mathcal{P}_m(D)|=\binom{n}{m}$.
Wir werden Äquivalenzrelationen $\sim$ auf $\mathcal{P}_m(D)$ definieren und nach $|\{\tilde{A}|A\in\mathcal{P}_m(D) \text{ und } |A|=m\}|$ fragen.
Sei T eine Untergruppe von S_D. Wir setzen $A\sim_T B \;:\Longleftrightarrow$ Es gibt $\tau\in T$ mit $\tau[A]=B$.

Lemma 1 $\sim_T$ ist eine Äquivalenzrelation.
Beweis: 1. $A\sim_T A$, da $id_D[A]=A$.
2. Sei $A\sim_T B$. Da mit $\tau\in T$ auch $\tau^{-1}\in T$ ist, ist $B\sim_T A$.
3. $A\sim_T B,\ B\sim_T C$. Da mit $\tau,\sigma\in T$ auch $\tau\circ\sigma\in T \implies A\sim_T C$. □

Sei für $A\in\mathcal{P}_m(D)$ $\quad \widetilde{A}^T=\{B|B\in\mathcal{P}_m(D) \text{ und } A\sim_T B\}$. Man nennt $\widetilde{A}^T$ auch die **Bahn von A** (**Orbit**).
Gesucht ist die Anzahl der Bahnen $b_T(m)=|\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|$.
Zwei Spezialfälle:

1. $T=\{id_D\} \quad \implies A\sim_T B \implies A=B$.
   Also ist $b_T(m)=|\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|=|\{\{A\}|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|=|\mathcal{P}_m(D)|$.
2. $T=S_D$.
   Dann gibt es zu allen $A,B\in\mathcal{P}_m(D)$ ein $\tau\in T$ mit $\tau[A]=B$.
   Also ist $b_T(m)=|\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|=|\{\mathcal{P}_m(D)\}|=1$.

Satz 2 (Burnside) $b_T(m)=|\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|=\frac{1}{|T|}\sum\limits_{\tau\in T}\underbrace{|\{A\in\mathcal{P}_m(D)|\tau[A]=A\}|}_{f_\tau(m)}$.

Beweis: Sei $A\in\mathcal{P}_m(D)$, dann sei $T_A=\{\tau|\tau[A]=A,\tau\in T\}$.
Behauptung 1: T_A ist eine Untergruppe von S_D (**der Stabilisator von A**)
Beweis:
1. Seien $\tau,\sigma\in T_A$, dann ist $\tau[A]=A,\sigma[A]=A$ und somit $\tau\circ\sigma[A]=A$, also ist $\tau\circ\sigma\in T_A$.
2. $\tau\in T_A \implies \tau[A]=A \implies \tau^{-1}[A]=\tau^{-1}[\tau[A]]=A \implies \tau^{-1}\in T_A$.

Behauptung 2: $|\widetilde{A}^T|\cdot|T_A|=|T|$.
Beweis: Für $B\in\widetilde{A}^T$ sei $R_B=\{\tau\in T|\tau[A]=B\}$.
Dann ist
1. $\bigcup R_B=T$.
2. $R_B\cap R_C=\emptyset$ für $B\neq C$.

Es genügt zu zeigen: $|R_B|=|T_A|$ für jedes $B\in\widetilde{A}^T$.
Beweis: $\tau\in R_B$. Wir setzen $\varphi_\tau:\begin{cases} T_A & \to & T\\ \sigma & \mapsto & \tau\circ\sigma\end{cases}$
Dann gilt:
a) φ_τ ist injektiv.
Seien $\sigma,\rho\in T_A$ mit $\varphi_\tau(\sigma)=\varphi_\tau(\rho)$
$\implies \tau\circ\sigma=\tau\circ\rho \implies \tau^{-1}\circ\tau\circ\sigma=\tau^{-1}\circ\tau\circ\rho \implies \sigma=\rho$.
b) $\varphi_\tau:T_A\to R_B$
Sei $\sigma\in T_A$. $\varphi_\tau(\sigma)=\tau\circ\sigma \implies \tau\circ\sigma[A]=\tau[\sigma[A]]=\tau[A]=B$.
c) Sei $\rho\in R_B$. Dann gibt es ein $\sigma\in T_A$ mit $\varphi_\tau(\sigma)=\rho$.
Sei $\sigma:=\tau^{-1}\circ\rho$. Dann ist $\sigma[A]=\tau^{-1}[\rho[A]]=\tau^{-1}[B]=A$.
Also ist $\sigma\in T_A$ und $\varphi_\tau(\sigma)=\tau\circ\sigma=\tau\circ\tau^{-1}\circ\rho=\rho$.

Behauptung 3: Ist $A\sim_T B$, dann ist $|T_A|=|T_B|$.
Beweis: $A\sim_T B \implies \widetilde{A}^T=\widetilde{B}^T$ und nach Behauptung 2 ist $|\widetilde{A}^T|\cdot|T_A|=|\widetilde{B}^T|\cdot|T_B| \implies |T_A|=|T_B|$.

Wir setzen $\widetilde{\mathcal{P}}=\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}$. Dann gilt:

$$\sum_{\tau\in T}|\{A\in\mathcal{P}_m(D)|\tau[A]=A\}|=|\{(\tau,A)|\tau\in T,A\in\mathcal{P}_m(D) \text{ und } \tau[A]=A\}|=\sum_{A\in\mathcal{P}_m(D)}|\{\tau\in T|\tau[A]=A\}|$$
$$=\sum_{\widetilde{A}^T\in\widetilde{\mathcal{P}}}\sum_{B\in\widetilde{A}^T}|\{\tau\in T|\tau[B]=B\}|=\sum_{\widetilde{A}^T\in\widetilde{\mathcal{P}}}\sum_{B\in\widetilde{A}^T}|T_B|=\sum_{\widetilde{A}^T\in\widetilde{\mathcal{P}}}|\widetilde{A}^T|\cdot|T_A|=\sum_{\widetilde{A}^T\in\widetilde{\mathcal{P}}}|T|=|\widetilde{\mathcal{P}}|\cdot|T|.$$

Also gilt: $b_T(m)=|\{\widetilde{A}^T|A\in\mathcal{P}_m(D)\}|=|\widetilde{\mathcal{P}}|=\frac{1}{|T|}\sum\limits_{\tau\in T}|\{A\in\mathcal{P}_m(D)|\tau[A]=A\}|$. □

Wir hatten $f_\tau(m)=|\{A\in\mathcal{P}_m(D)|\tau[A]=A\}|$ wie folgt berechnet:

1. Sei $I_\tau=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,g_{\mathfrak{D}_\tau}(i)}$ der Zykelindex von τ.
2. Die Polyasche Einsetzung lieferte $\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_\tau(m)x^m=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+x^i\right)^{\,g_{\mathfrak{D}_\tau}(i)}$.

Es liegt also nahe, den Zykelindex von T wie folgt zu definieren:

$$I_T = \frac{1}{|T|} \sum_{\tau \in T} I_\tau = P(x_1, \dots, x_n).$$

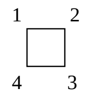
Dann liefert die Polyasche Einsetzung von $(1 + x^i)$ für x_i

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_T(m) x^m = P(1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n).$$

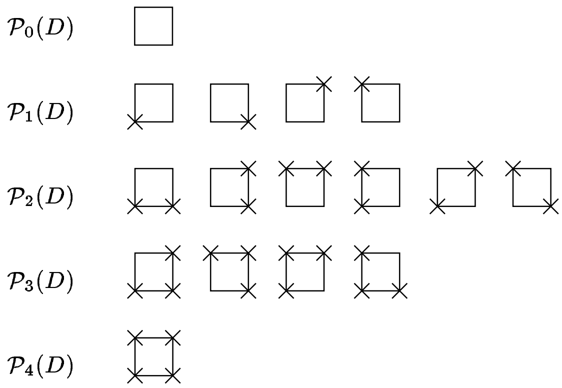
<u>Beispiel:</u> $D = \{1,2,3,4\}$. S_4 besitzt folgende Permutationen:

	σ	I_σ		σ	I_σ		σ	I_σ
1.	$(1)(2)(3)(4)$	${x_1}^4$		$(13)(24)$	${x_2}^2$		$(234)(1)$	x_1x_3
2.	$(12)(3)(4)$	${x_1}^2x_2$		$(14)(23)$	${x_2}^2$		$(243)(1)$	x_1x_3
	$(13)(2)(4)$	${x_1}^2x_2$	4.	$(123)(4)$	x_1x_3	5.	(1234)	x_4
	$(14)(2)(3)$	${x_1}^2x_2$		$(132)(4)$	x_1x_3		(1423)	x_4
	$(1)(23)(4)$	${x_1}^2x_2$		$(124)(3)$	x_1x_3		(1324)	x_4
	$(1)(24)(3)$	${x_1}^2x_2$		$(142)(3)$	x_1x_3		(1243)	x_4
	$(1)(2)(34)$	${x_1}^2x_2$		$(134)(2)$	x_1x_3		(1432)	x_4
3.	$(12)(34)$	${x_2}^2$		$(143)(2)$	x_1x_3		(1342)	x_4

$$I_{S_4} = \frac{1}{24}\left({x_1}^4 + 6{x_1}^2x_2 + 3{x_2}^2 + 8x_1x_3 + 6x_4\right)$$

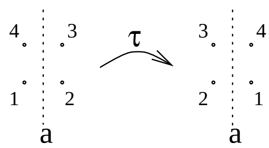


Sei $D = \{1,2,3,4\}$. Die Elemente von D können wir als Punkte in einer Ebene zeichnen. Um die Ecken zu kennzeichnen, die zu $A \subseteq D$ gehören, kreuzen wir sie an.



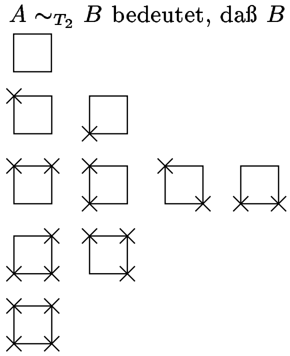
Man wähle eine Untergruppe T von S_4. Zwei Muster sind äquivalent (gleich), wenn es eine Permutation $\sigma \in T$ gibt, die die Muster ineinander überführt.

1. $T_1 = \{id_D\}$.
   Dann ist $A \sim_{T_1} B$ gdw. $A = B$
   Also ist $b_{T_1}(m) = |\{\tilde{A}^{T_1} | A \in \mathcal{P}_m(D)\}| = |\{\{A\} | A \in \mathcal{P}_m(D)\}| = |\mathcal{P}_m(D)|$
   $\rightsquigarrow\ b_{T_1}(0) = b_{T_1}(4) = 1,\ b_{T_1}(1) = b_{T_1}(3) = 4,\ b_{T_1}(2) = 6.$
   $id_D = (1)(2)(3)(4)$. $I_\tau = {x_1}^4 \implies I_{T_1} = \frac{1}{1}{x_1}^4 \qquad (T_1 = \{id_D\})$.
   Die Polyasche Einsetzung liefert $\sum_{m=0}^{\infty} b_{T_1}(m)x^m = (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$,
   also ist $b_{T_1}(0) = b_{T_1}(4) = 1,\ b_{T_1}(1) = b_{T_1}(3) = 4,\ b_{T_1}(2) = 6.$
2. $\tau = (12)(34)$, $T_2 = <\tau> = \{\tau, \tau^2\}$, da $\tau^2 = (1)(2)(3)(4)$.
   Wir können dies geometrisch wie folgt interpretieren:



τ ist eine Spiegelung an der Achse a.

$A \sim_{T_2} B$ bedeutet, daß B aus A hervorgeht durch Spiegelung an der Achse a. Die Muster sind dann:



Also ist $b_{T_2}(0) = b_{T_2}(4) = 1,\ b_{T_2}(1) = b_{T_2}(3) = 2,\ b_{T_2}(2) = 4.$

$I_\tau = {x_2}^2,\ I_{\tau^2} = {x_1}^4 \implies I_{T_2} = \frac{1}{2}({x_1}^4 + {x_2}^2).$

Die Polyasche Einsetzung liefert:

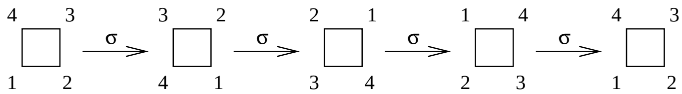
$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{T_2}(m)x^m = \frac{1}{2}\left[(1+x)^4 + (1+x^2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left((1+4x+6x^2+4x^3+x^4) + (1+2x^2+x^4)\right) = 1+2x+4x^2+2x^3+x^4$$

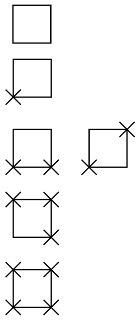
Also ist $b_{T_2}(0) = b_{T_2}(4) = 1,\ b_{T_2}(1) = b_{T_2}(3) = 2,\ b_{T_2}(2) = 4.$

3. Sei $\sigma = (1234)$ und $T_3 =< \sigma >$.
$\sigma^2 = (13)(24),\ \sigma^3 = (1432),\ \sigma^4 = (1)(2)(3)(4)$. Also ist $T_3 = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$.

Wir könne T_4 wie folgt geometrisch interpretieren:



Die Muster sind dann:



Also ist $b_{T_3}(0) = b_{T_3}(1) = b_{T_3}(3) = b_{T_3}(4) = 1,\ b_{T_3}(2) = 2$.

$$\begin{array}{ll} \sigma = (1234) & I_\sigma = x_4 \\ \sigma^2 = (13)(24) & I_{\sigma^2} = {x_2}^2 \\ \sigma^3 = (1432) & I_{\sigma^3} = x_4 \\ \sigma^4 = (1)(2)(3)(4) & I_{\sigma^4} = {x_1}^4 \end{array}$$

$\Longrightarrow\ I_{T_3} = \frac{1}{4}({x_1}^4 + {x_2}^2 + 2x_4)$

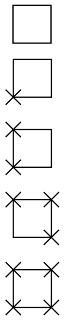
Die Polyasche Einsetzung liefert

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{T_3}(m)x^m = \frac{1}{4}\left[(1+x)^4 + (1+x^2)^2 + 2(1+x^4)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(1+4x+6x^2+4x^3+x^4) + (1+2x^2+x^4) + (2+2x^4)\right] = 1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4.$$

Also ist $b_{T_3}(0) = b_{T_3}(1) = b_{T_3}(3) = b_{T_3}(4) = 1,\ b_{T_3}(2) = 2$.

4. Sei $T_4 = S_4$. Die Muster sind dann:



Also ist $b_{T_4}(0) = b_{T_4}(1) = b_{T_4}(2) = b_{T_4}(3) = b_{T_4}(4) = 1$

Der Zykelindex von T_4 ist

$$I_{T_4} = \frac{1}{24}\left[{x_1}^4 + 6{x_1}^2 x_2 + 3{x_2}^2 + 8x_1x_3 + 6x_4\right]$$

Die Polyasche Einsetzung liefert

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{T_4}(m)x^m = \frac{1}{24}\left[(1+x)^4 + 6(1+x)^2(1+x^2) + 3(1+x^2)^2 + 8(1+x)(1+x^3) + 6(1+x^4)\right]$$

$$= \frac{1}{24}[(1+4x+6x^2+4x^3+x^4) + (6+12x+12x^2+12x^3+6x^4)$$
$$+(3+6x^2+3x^4) + (8+8x+8x^3+8x^4) + (6+6x^4)]$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

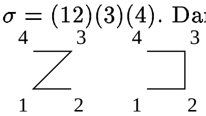
3.6 Anzahl der Graphen

Sei $P = \{i | 1 \le i \le n\}$. Sei $K \subseteq \mathcal{P}_2(P) =: D$. Dann hatten wir (P,K) einen **Graph**en genannt.
Sei $a_P(m) = |\{(P,K) | K \in \mathcal{P}_m(D)\}| = |\mathcal{P}_m(D)|$.

$$D = \mathcal{P}_2(P) \implies |D| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \implies a_P(m) = \binom{|D|}{m} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m}.$$

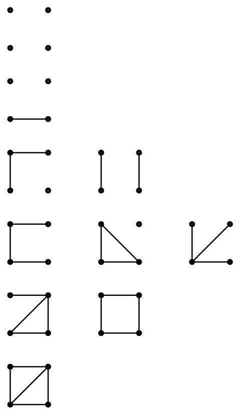
Ist $n = 4$, so ist $P = \{1,2,3,4\}$. Dann ist $|D| = \frac{4\cdot 3}{2} = 6 \implies a_P(m) = \binom{6}{m}$.
Also ist $a_P(0) = a_P(6) = 1,\ a_P(1) = a_P(5) = 6,\ a_P(2) = a_P(4) = 15,\ a_P(3) = 20$.

Zwei Graphen (P,K) und (P,L) heißen **isomorph**, wenn es ein $\sigma \in S_P$ gibt mit: $\{p,q\} \in K \iff \{\sigma(p), \sigma(q)\} \in L$.
Beispiel: Sei $\sigma = (12)(3)(4)$. Dann ist σ ein Isomorphismus.



Sei $\tilde{K} = \{L | (P,K) \approx (P,L)\}$. Gesucht ist $b_P(m) = |\{\tilde{K} | K \in \mathcal{P}_m(D)\}|$.

Die Muster sind dann:



$m = 0$: $a_P(m) = 1,\ b_P(m) = 1$

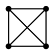
$m = 1$: $a_P(m) = 6,\ b_P(m) = 1$

$m = 2$: $a_P(m) = 15,\ b_P(m) = 2$

$m = 3$: $a_P(m) = 20,\ b_P(m) = 3$

$m = 4$: $a_P(m) = 15,\ b_P(m) = 2$

$m = 5$: $a_P(m) = 6,\ b_P(m) = 1$

$m = 6$:  $a_P(m) = 1,\ b_P(m) = 1$

Um $b_P(m)$ mit Hilfe der Polyatheorie zu lösen, formulieren wir die Frage um:
Sei σ eine Permutation der Eckenmenge ($\sigma \in S_P$). Dann sei $\tau_\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ \{p,q\} & \mapsto & \{\sigma(p), \sigma(q)\} \end{array} \right.$.

Lemma 1 1. $\tau_\sigma \in S_D$.
2. $\tau_{\sigma \circ \rho} = \tau_\sigma \circ \tau_\rho$.

Beweis: zu 1. Sei $\{p,q\} \in D \implies \{\sigma^{-1}(p), \sigma^{-1}(q)\} \in D \implies \tau_\sigma(\{\sigma^{-1}(p), \sigma^{-1}(q)\}) = \{\sigma \circ \sigma^{-1}(p), \sigma \circ \sigma^{-1}(q)\} = \{p,q\}$.
Also ist τ_σ surjektiv. Da D endlich ist, ist τ_σ bijektiv.
zu 2. $\tau_{\sigma\circ\rho}(\{p,q\}) = \{\sigma \circ \rho(p), \sigma \circ \rho(q)\} = \tau_\sigma(\{\rho(p), \rho(q)\}) = \tau_\sigma(\tau_\rho(\{p,q\})) = \tau_\sigma \circ \tau_\rho(\{p,q\})$.
Also ist $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} S_P & \to & S_D \\ \sigma & \mapsto & \tau_\sigma \end{array} \right.$ ein Homomorphismus.
Man sagt auch, daß S_P vermöge φ in S_D wirkt. □

Da φ ein Homomorphismus ist, ist $T = \{\tau_\sigma | \sigma \in S_P\}$ eine Untergruppe von S_D.
Wir definieren: Seien $K, L \in \mathcal{P}_m(D)$, dann ist $K \sim_T L$, wenn es ein $\tau \in T$ gibt mit $\tau[K] = L$.

Lemma 2 $\sim\ = \ \sim_T$

Beweis: $K \sim L \iff \exists\, \sigma \in S_P$ mit $L = \{\{\sigma(p), \sigma(q)\} | \{p,q\} \in K\} \iff \exists\, \sigma \in S_P$ mit $\tau_\sigma[K] = L$
$\iff \exists\, \tau \in T$ mit $\tau[K] = L \iff K \sim_T L$. □

Also ist $b_P(m) = |\{\widetilde{K} | K \in \mathcal{P}_m(D)\}| = |\{\widetilde{K}^T | K \in \mathcal{P}_m(D)\}| = b_T(m)$.
Wir haben also den Zykelindex $I_T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|T|} \sum\limits_{\tau \in T} I_\tau(x_1, \ldots, x_n)$ zu bestimmen.

Die Polyasche Einsetzung liefert $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_P(m) x^m = I_T(1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n)$, wobei $n = |D| = |\mathcal{P}_2(P)|$.

Beispiel: $P = \{1,2,3,4\}$.
Man zeigt: 1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} S_P & \to & S_D \\ \sigma & \mapsto & \tau_\sigma \end{array} \right.$ ist injektiv.
2. Seien $\sigma, \rho \in S_P$ mit $I_\sigma = I_\rho \implies I_{\tau_\sigma} = I_{\tau_\rho}$.

a) $\sigma = (1)(2)(3)(4)$ $\qquad I_\sigma = {x_1}^4$
$\tau_\sigma = (\{1,2\})(\{1,3\})(\{1,4\})(\{2,3\})(\{2,4\})(\{3,4\}) \implies I_{\tau_\sigma} = {x_1}^6$

b) Es gibt 6 Permutationen $\sigma \in S_P$ mit $I_\sigma = x_1^2 x_2$
Sei $\sigma = (12)(3)(4)$
$\tau_\sigma = (\{1,2\})(\{3,4\})(\{1,3\},\{2,3\})(\{1,4\},\{2,4\}) \implies I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 {x_2}^2$

c) Es gibt 3 Permutationen aus $S_P = S_4$ mit $I_\sigma = {x_2}^2$
Sei $\sigma = (12)(34)$
$\tau_\sigma = (\{1,2\})(\{3,4\})(\{1,3\},\{2,4\})(\{1,4\},\{2,3\}) \implies I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 {x_2}^2$

d) Es gibt 8 Permutationen mit Zykelindex $I_\sigma = x_1 x_3$
Sei $\sigma = (123)(4)$
$\tau_\sigma = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\})(\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}) \implies I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$

e) Es gibt 6 Permutationen mit $I_\sigma = x_4$
Sei $\sigma = (1234)$
$\tau_\sigma = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\})(\{1,3\},\{2,4\}) \implies I_{\tau_\sigma} = x_2 x_4$

Damit ist der Zykelindex von T gleich $I_T = \frac{1}{24}({x_1}^6 + 9{x_1}^2{x_2}^2 + 8{x_3}^2 + 6x_2x_4)$.
Die Polyasche Einsetzung liefert

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_P(m) x^m = \frac{1}{24}\left[(1+x)^6 + 9(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4)\right]$$
$$= \ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6.$$

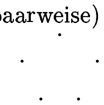
Alsi ost $b_P(0) = b_P(1) = b_P(5) = b_P(6) = 1,\ b_P(2) = b_P(4) = 2,\ b_P(3) = 3$.

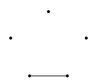
Beispiel: $P = \{1,2,3,4,5\}$
Dann ist $|D| = |\mathcal{P}_2(P)| = 10$, also ist $a_P(m) = \binom{10}{m}$.

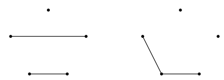
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_P(m)$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

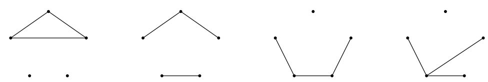
$I_{S_5} = {x_1}^5 + 10{x_1}^3x_2 + 15x_1{x_2}^2 + 20{x_1}^2x_3 + 20x_2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5$.
Sei $T = \{\tau_\sigma | \sigma \in S_5\}$, dann ist $I_T = {x_1}^{10} + 10{x_1}^4{x_2}^3 + 15{x_1}^2{x_2}^4 + 20x_1{x_3}^3 + 20x_1x_3x_6 + 30x_2{x_4}^2 + 24{x_5}^2$.
Die Polyasche Einsetzung liefert $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_P(m)x^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_T(m)x^m = I_T(1+x, \ldots, 1+x^5)$
$= 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 4x^7 + 2x^8 + x^9 + x^{10}$.

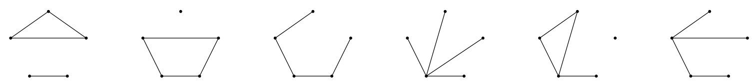
Die (paarweise) nicht-isomorphen Muster sind:

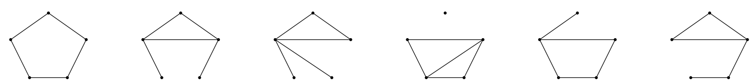
$m = 0$: 

$m = 1$: 

$m = 2$: 

$m = 3$: 

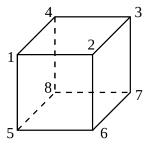
$m = 4$: 

$m = 5$: 

$m = 6$:	komplementär zu $m = 4$
$m = 7$:	komplementär zu $m = 3$
$m = 8$:	komplementär zu $m = 2$
$m = 9$:	komplementär zu $m = 1$
$m = 10$:	komplementär zu $m = 0$

3.7 Geometrische Anwendungen

Gegeben sei ein Würfel.



Man kann wie folgt Muster erzeugen:

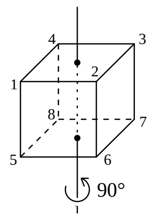
1. Man kreuzt Ecken an.
2. Man kreuzt Kanten an.
3. Man kreuzt Flächen an.

Man sagt, zwei Muster sind äquivalent, wenn sie durch Drehungen des Würfels ineinander übergehen.

Welche Drehungen gibt es? (Klar: Jede Drehung erzeugt eine Permutation der Ecken.)

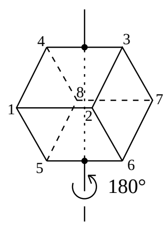
1. Drehachse durch den Mittelpunkt zweier gegenüberliegender Flächen.

1.1.	Flächen $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{5, 6, 7, 8\}$.		
1.1.1.	90°	$\sigma = (1234)(5678)$	$I_\sigma = {x_4}^2$
1.1.2.	180°	$\sigma = (13)(24)(57)(68)$	$I_\sigma = {x_2}^4$
1.1.3.	270°	$\sigma = (1432)(5876)$	$I_\sigma = {x_4}^2$
1.2.	Flächen $\{1, 5, 8, 4\}$ und $\{2, 6, 7, 3\}$.		
1.2.1.	90°		$I_\sigma = {x_4}^2$
1.2.2.	180°		$I_\sigma = {x_2}^4$
1.2.3.	270°		$I_\sigma = {x_4}^2$
1.3.	Flächen $\{1, 2, 6, 5\}$ und $\{4, 3, 7, 8\}$.		
1.3.1.	90°		$I_\sigma = {x_4}^2$
1.3.2.	180°		$I_\sigma = {x_2}^4$
1.3.3.	270°		$I_\sigma = {x_4}^2$



2. Drehung um die Achsen durch die Mitte zweier gegenüberliegender Kanten um 180°.

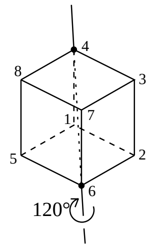
2.1.	Kanten $\{5, 6\}$, $\{4, 3\}$	
	$\Longrightarrow\ \sigma = (56)(34)(17)(28)$	$I_\sigma = {x_2}^4$
2.2.	Kanten $\{1, 2\}$, $\{8, 7\}$	$I_\sigma = {x_2}^4$
2.3.	Kanten $\{1, 4\}$, $\{6, 7\}$	$I_\sigma = {x_2}^4$
2.4.	Kanten $\{1, 5\}$, $\{3, 7\}$	$I_\sigma = {x_2}^4$
2.5.	Kanten $\{2, 6\}$, $\{4, 8\}$	$I_\sigma = {x_2}^4$
2.6.	Kanten $\{2, 3\}$, $\{5, 8\}$	$I_\sigma = {x_2}^4$



3. Drehung um die Raumdiagonalen (durch zwei gegenüberliegende Ecken, um 120°.)

3.1. Ecken $\{4\}, \{6\}$

3.1.1. 120° $\sigma = (4)(6)(275)(138)$ $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.1.2. 240° $\sigma = (4)(6)(257)(183)$ $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.2. Ecken $\{2\}, \{8\}$
3.2.1. 120° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.2.2. 240° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.3. Ecken $\{1\}, \{7\}$
3.3.1. 120° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.3.2. 240° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.4. Ecken $\{5\}, \{3\}$
3.4.1. 120° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
3.4.2. 240° $I_\sigma = {x_1}^2{x_3}^2$
4. Drehung um 360° oder 0° $I_\sigma = {x_1}^8$

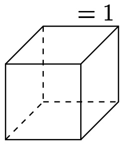


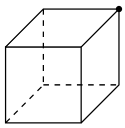
Sei T die Untergruppe der Permutationsgruppe S_8, die durch die Drehungen der Eckenmenge erzeugt wird.

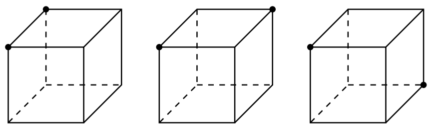
$$I_T = \frac{1}{24}\left({x_1}^8 + 9{x_2}^4 + 8{x_1}^2{x_3}^2 + 6{x_4}^2\right).$$

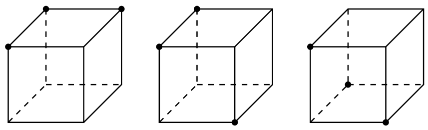
Die Polyasche Einsetzung liefert

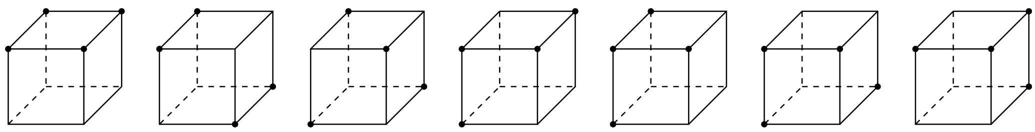
$$\sum_{m=0}^{\infty} b_T(m)x^m = \frac{1}{24}\left[(1+x)^8 + 9(1+x^2)^4 + 8(1+x)^2(1+x^3)^2 + 6(1+x^4)^2\right]$$
$$= 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 3x^5 + 5x^6 + x^7 + x^8.$$

$b_T(0) = 1$ 

$b_T(1) = 1$ 

$b_T(2) = 3$ 

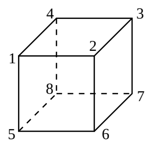
$b_T(3) = 3$ 

$b_T(4) = 7$ 

Die Menge der Flächen des Würfels ist

$$F = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7,8\}, \{1,5,6,2\}, \{1,4,8,5\}, \{3,4,8,7\}, \{2,6,7,3\}\}.$$

Wir markieren Flächen und fragen nach der Anzahl der Muster. Dabei sind zwei Muster äquivalent, wenn sie durch Drehung ineinander überführt werden können.



Jede Permutation der Ecken bewirkt eine Permutation der Flächen.

1. Drehachse durch die Mitte zweier gegenüberliegender Flächen
1.1. Flächen $\{1,2,3,4\}, \{5,6,7,8\}$
1.1.1. 90° $\sigma = (1234)(5678)$
$\tau_\sigma = (\{1,2,3,4\})(\{5,6,7,8\})(\{1,2,5,6\}\ \{2,3,6,7\}\ \{3,4,7,8\}\ \{4,1,8,5\})$ $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$
1.1.2. 180° $\sigma = (13)(24)(57)(68)$
$\tau_\sigma = (\{1,2,3,4\})(\{5,6,7,8\})(\{1,5,2,6\}\ \{3,7,4,8\})(\{2,6,3,7\}\ \{4,8,1,5\})$ $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2{x_2}^2$
1.1.3. 270° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$
1.2. Flächen $\{1,4,5,8\}, \{2,6,7,3\}$
1.2.3. 90° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$
1.2.3. 180° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2{x_2}^2$
1.2.3. 270° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$
1.3. Flächen $\{1,5,2,6\}, \{4,3,8,7\}$
1.3.3. 90° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$
1.3.3. 180° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2{x_2}^2$
1.3.3. 270° $I_{\tau_\sigma} = {x_1}^2 x_4$

2.	Drehung um die Achse durch die Mitte zweier gegenüberliegender Kanten (180°)	
2.1	Kante $\{5,6\},\{4,3\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
2.2	Kante $\{1,2\},\{8,7\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
2.3	Kante $\{1,4\},\{6,7\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
2.4	Kante $\{1,5\},\{3,7\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
2.5	Kante $\{2,6\},\{4,8\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
2.6	Kante $\{2,3\},\{5,8\}$	$I_{\tau_\sigma} = {x_2}^3$
3.	Drehung um die Raumdiagonalen	
3.1.	Ecken $\{4\},\{6\}$	
3.1.1.	120°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.1.2.	240°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.2.	Ecken $\{2\},\{8\}$	
3.2.1.	120°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.2.2.	240°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.3.	Ecken $\{1\},\{7\}$	
3.3.1.	120°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.3.2.	240°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.4.	Ecken $\{5\},\{3\}$	
3.4.1.	120°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
3.4.2.	240°	$I_{\tau_\sigma} = {x_3}^2$
4.	Drehung um 0°	$I_{\tau_\sigma} = {x_1}^6$

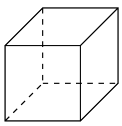
Sei T die Untergruppe von S_F, die durch die Drehungen hervorgeht.

$$I_T = \frac{1}{24}\left({x_1}^6 + 6{x_1}^2x_4 + 3{x_1}^2{x_2}^2 + 6{x_2}^3 + 8{x_3}^2\right)$$

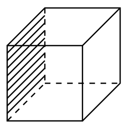
Die Polyasche Einsetzung liefert

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_T(m)x^m = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6$$

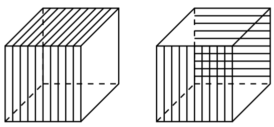
$b_T(0) = 1$



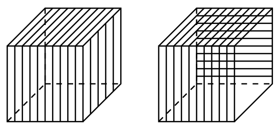
$b_T(1) = 1$



$b_T(2) = 2$



$b_T(3) = 2$



Kapitel 4

"Nimm"-Spiele

4.1 "Nimm"-Spiele

Das Marienbad-Spiel

Gegeben seien 4 Haufen von Streichhölzern a_1, a_2, a_3, a_4, mit $|a_1| = 1, |a_2| = 3, |a_3| = 5, |a_4| = 7$. Eine Partie zweier Spieler besteht darin, daß sie abwechselnd Streichhölzer von den Haufen nehmen. Dabei sind folgende Spielregeln zu beachten:

1. Sie müssen mindestens ein Streichholz nehmen.
2. Sie dürfen mehr Streichhölzer nehmen, aber nur von einem Haufen.

Wer die Regeln nicht mehr erfüllen kann, hat verloren.

Wir nennen $(P, \leq, Q)$ ein **"Nimm"-Spiel**, wenn

1. $\leq$ ist eine partielle, fundierte Ordnung.
2. $Q : P \to \mathcal{P}(P)$ mit $Q(a) \subseteq \{b | b < a\}$.

Dabei heißt $\leq$ **partielle Ordnung**, wenn für alle $a, b, c \in P$ gilt:

1. $a \leq b$ und $b \leq c \implies a \leq c$.
2. $a \leq b$ und $b \leq a \implies a = b$.

$\leq$ heißt **fundiert**, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq P$ mit $A \neq \emptyset$ gilt:

Es gibt ein $a \in A$ mit $\{b | b < a\} \cap A = \emptyset$. Man nennt a kleinstes Element von A.

Sei $(P, \leq, Q)$ ein "Nimm"-Spiel und sei $a_0 \in P$. Eine **Partie** ist eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit:

1. $a_{i+1} \in Q(a_i)$ falls $Q(a_i) \neq \emptyset$.
2. $a_{i+1} = a_i$ sonst.

Eine Partie endet, wenn es ein i gibt mit $a_{i+1} = a_i$.

Lemma 1 Ist $(P, \leq, Q)$ ein Spiel, dann endet jede Partie.
Beweis: Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Partie. Dann sei $A = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$.
Da $\leq$ fundiert ist, besitzt A ein kleinstes Element a_i, d.h. $\{b | b \leq a_i\} \cap A = \emptyset$.
Da $a_{i+1} \leq a_i \implies a_{i+1} = a_i$. Das kleinste i mit $a_{i+1} = a_i$ nenne man auch die **Länge der Partie**. □

Beispiel 1: Sei $Q_\infty(n) = \{i | i < n\}$. Dann ist $(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)$ ein "Nimm"-Spiel:

Gegeben sei ein Haufen von Streichhölzern, von dem jeder Spieler ein Streichholz nehmen muß, aber beliebig viele nehmen kann.

Beispiel 2: Sei $Q_3(n) = \{i < n | i + 3 \geq n\}$. Dann ist $(\mathbb{N}, \leq, Q_3)$ ein Spiel:

Gegeben sei ein Haufen von Streichhölzern, von denen jeder Spieler mindestens eins nehmen muß, aber höchstens 3 Streichhölzer nehmen darf.

Seien $(P_1, \leq Q_1)$ und $(P_2, \leq, Q_2)$ Spiele. Wir definieren das Produkt $(P, \leq, Q) = (P_1, \leq, Q_1) \times (P_2, \leq, Q_2)$ wie folgt:

1. $P = P_1 \times P_2$.
2. $(c, d) \leq (a, b)$ wenn $c \leq a$ und $d \leq b$.
3. $Q((a, b)) = \{a\} \times Q_2(b) \cup Q_1(a) \times \{b\}$.

Lemma 2 $(P_1, \leq, Q_1) \times (P_2, \leq, Q_2)$ ist ein Spiel.
Beweis: Behauptung: $\leq$ ist fundiert.
Beweis: Sei $A \subseteq P_1 \times P_2$ mit $A \neq \emptyset$.
Sei $A_1 = \{c | (c, d) \in A\}$. Da $(P_1, \leq)$ fundiert ist, besitzt A_1 ein kleinstes Element a.
Sei $A_2 = \{d | (a, d) \in A\}$. Dann besitzt A_2 ein kleinstes Element b.

Wir zeigen: (a,b) ist kleinstes Element von A.
Sei $(c,d) < (a,b)$.
1. Fall: $c < a \implies (c,d) \notin A$, da $c \notin A_1$.
2. Fall: $c = a \implies d < b \implies d \notin A_2 \implies (c,d) \notin A$ □

Beispiel 3: Sei $Q_\infty(n) = \{i | i < n\}$.
Sei $(P, \leq, Q)$ das Spiel $(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty) \times (\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)$.

Gegeben seien 2 Haufen von Streichhölzern. Jeder Spieler muß mindestens 1 Streichholz nehmen, kann aber von einem Haufen beliebig viele nehmen.

$Q((n,m)) = \{(n,i) | i < m\} \cup \{(j,m) | j < n\}$.

Sei $(P, \leq, Q)$ ein Spiel und D eine endliche Menge. Wir definieren $(P, \leq, Q)^D =: (P^D, \leq, Q_D)$ wie folgt:
1. $P^D = \{g | g : D \to P\}$.
2. $g \leq f$ falls $g(d) \leq f(d) \quad \forall d \in D$.
3. $Q_D(g) = \{f \in P^D | \; \exists d \in D : f(d) \leq g(d) \;\wedge\; (\forall c \neq d : f(c) = g(c))\}$.

Satz 3 Ist $(P, \leq, Q)$ ein Spiel und D endlich, dann ist $(P, \leq, Q)^D$ ein Spiel.
Beweis: (Induktion über $|D|$)
Ist $D = \emptyset \implies P = \emptyset$.
Sei $|D| > 0$. Dann sei $d \in D$ und $E = D \setminus \{d\}$.
Dann ist nach IV $(P, \leq Q)^E$ ein Spiel.
Sei $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} P^D & \to & P^E \times P \\ g & \mapsto & (g \upharpoonright E, g(d)) \end{array} \right.$
Dann ist φ ein Isomorphismus zwischen $(P, \leq Q)^D$ und $(P, \leq, Q)^E \times (P, \leq, Q)$.
Also ist $(P, \leq, Q)^D$ ein Spiel. □

Beispiel 4: Sei $Q_\infty = \{i | i < n\}$ und sei D eine endliche Menge. Dann ist $(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)^D$ das Spiel:

Gegeben sei eine Menge D von Haufen von Streichhölzern, von denen jeder Spieler mindestens ein Streichholz wegnehmen muß, aber von einem Haufen auch mehr Streichhölzer wegnehmen darf.

4.2 Kerne von "Nimm"-Spielen

Fundierte partielle Ordnungen haben viele "schöne" Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

Lemma 1 Sei $(P, \leq)$ eine fundierte partielle Ordnung und $E(v_o)$ eine Eigenschaft.
1. Man setzt voraus, daß $E(b)$ für alle $b < a$ gilt.
   Dann zeigt man, daß dann auch
2. $E(a)$ gilt.

Dann gilt $E(a)$ für alle $a \in P$.
Beweis: Angenommen $P \setminus \{c | E(c)\} \neq \emptyset$.
Dann besitzt $P \setminus \{c | E(c)\}$ ein kleinstes Element a. Dann gilt $E(b)$ für alle $b < a$.
Damit ist 1. erfüllt, also gilt $E(a)$ nach 2. # □

Man kann ebenso auf P wie auf $\mathbb{N}$ Funktionen durch Rekursion definieren.

Beispiel: Sei $(P, \leq, Q)$ ein Spiel. Dann ist $Q(a) \subseteq \{b | b < a\}$.
Dann gibt es genau eine Funktion F mit $F(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \in F[Q(a)] = \{F(b) | b \in Q(a)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$

Wir hatten eine Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $F(a) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } a = 0 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ F(a-2) + F(a-1) & \text{für } a \geq 2 \end{array} \right.$ definiert.

Sei P eine Menge und $\leq$ eine fundierte partielle Ordnung und $Q : P \to \mathcal{P}(P)$ mit $Q(a) \subseteq \{b | b < a\}$.

Satz 2 (Ein Spezialfall des Rekursionssatzes)
Sei $(P, \leq, Q)$ ein Spiel, dann gibt es genau eine Funktion $F : P \to \{0,1\}$ mit
$F(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } 0 \in F[Q(a)] = \{F(b) | b \in Q(a)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$
Beweisskizze: (Existenz) Wir nennen $A \subseteq P$ transitiv, wenn $\{b | b < a\} \subseteq P$ für jedes $a \in A$.
Dann gilt: 1. $\emptyset$ ist transitiv, P ist transitiv
2. Ist A transitiv und a ein kleinstes Element aus $P \setminus A$, dann ist $A \cup \{a\}$ transitiv.
3. Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge von transitiven Mengen, dann ist $\bigcup \mathfrak{A}$ transitiv.

Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Funktionen f mit $Vb\ f$ ist transitiv. Für alle $a \in Vb\ f$ gilt: $f(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } 0 \in f[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$

Dann gilt: 4. $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

5. Sei a ein kleinstes Element aus $P \setminus Vb\ f$. Dann ist $Q(a) \subseteq \{b|b < a\} \subseteq Vb\ f$.

Wir setzen $i = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in f[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Dann ist $f \cup \{(a,i)\} \in \mathfrak{F}$.

6. Seien $f, g \in \mathfrak{F}$, dann ist $f \cup g \in \mathfrak{F}$ (Bew. indirekt mit 5., beachte $Vb\ f \wedge Vb\ g$)

Sei $F = \bigcup \mathfrak{F}$, dann ist auf Grund von 6. F eine Funktion. Durch Induktion auf $(P, \leq)$ zeigt man, daß

$F(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in F[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Also ist $F \in \mathfrak{F}$. Aufgrund von 5. ist $Vb\ F = P$.

(Eindeutigkeit) Sei $G : P \to \{0,1\}$ eine Funktion mit $G(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in G[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Longrightarrow G \in \mathfrak{F} \Longrightarrow G \subseteq F$, da $Vb\ G = Vb\ F \Longrightarrow G = F$. □

Beispiel: $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $G(0) = 1,\ G(1) = 1$ und $G(n) = G(n-1) + G(n-2)$ für $n \geq 2$

Sei $F : P \to \{0,1\}$ mit $F(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in F[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (wohldefiniert nach Satz 2)

Dann heißt $Kern(P, \leq, Q) := \{a | F(a) = 0\}$ der **Kern von** $(P, \leq, Q)$.

Folgerung 3 Ist $K = Kern(P, \leq, Q)$, dann gilt:

1. $Q(a) = \emptyset$, dann ist $a \in K$.
2. Ist $a \in K$, dann ist $b \notin K$ für alle $b \in Q(a)$.
3. Ist $a \notin K$, dann gibt es ein $b \in Q(a)$ mit $b \in K$.

Gegeben sei also ein Spiel $(P, \leq, Q)$ und $a_0 \in P$. Zwei Spieler kennen $K = Kern(P, \leq, Q)$. Wie werden sie spielen?

A. $a_0 \in K$. Also ist auf Grund von 2. $a_1 \notin K$. Also kann der 2. Spieler auf Grund von 3. ein $a_2 \in K$ wählen.

$\vdots$

Also kann der 2. Spieler dafür sorgen, daß $a_{2i} \in K$ und damit $a_{2i+1} \notin K$.

Die Partie endet mit einem a_j, so daß $Q(a_j) = \emptyset \overset{1}{\Longrightarrow} a_j \in K$.

Also ist $j = 2i$. Somit hat der 2. Spieler gewonnen.

B. $a_0 \notin K$.

Dann wird der 1. Spieler ein $a_1 \in K$ wählen.

$\vdots$

Er kann dafür sorgen, daß $a_{2k+1} \in K$.

Also folgt analog zu A, daß der 1. Spieler gewinnt.

Beispiel 1: Sei $Q_\infty(b) = \{i | i < n\}$.

Behauptung: $Kern(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty) = \{0\}$.

$Q(0) = \emptyset$. Also ist $F(0) = 0$. Ist $n > 0$, dann ist $0 \in Q_\infty(n)$.

Da $F(0) = 0$ ist, ist $0 \in F[Q_\infty(n)] \Longrightarrow F(n) = 1$.

Beispiel 2: Sei $Q_3 = \{i < n | i + 3 \geq n\}$.

Behauptung: $Kern(\mathbb{N}, \leq, Q_3) = \{4k | k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: (Induktion über n)

$Q_3(0) = \emptyset$, also ist $F(0) = 0$.

$Q_3(1) = \{0\}$, also ist $0 = F(0) \in F[Q_3(1)] \Longrightarrow F(1) = 1$

$Q_3(2) = \{0,1\}$, also ist $0 = F(0) \in F[Q_3(2)] \Longrightarrow F(2) = 1$.

Sei $n > 2$:

$Q_3(n) = \{n-3, n-2, n-1\}$. Also ist $F[Q_3(n)] = \{F(n-3), F(n-2), F(n-1)\}$.

Nach IV ist $0 \in F[Q_3(n)] \iff n \neq 4 \cdot k$.

Also ist $F(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 4 \cdot k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

4.3 Grundey-Funktionen

Sei $(P, \leq, Q)$ ein "Nimm"-Spiel. Wir wollen nun voraussetzen, daß $Q(a) \subset\subset \{b | b < a\}$.

Wir hatten $F : P \to \{0,1\},\ F(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in F[Q(a)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $G : P \to \mathbb{N}$ definiert durch $G(a) := \min(\mathbb{N} \setminus G[Q(a)])$ (wohldefiniert nach allg. Rekursionssatz).

G heißt **Grundey-Funktion von** $(P, \leq, Q)$.

Lemma 1 Ist G eine Grundey-Funktion von $(P, \leq, Q)$, dann ist $Kern(P, \leq, Q) = \{a | G(a) = 0\}$.

Beweis: (Induktion über $(P, \leq)$).

Wir zeigen: $G(a) = 0 \iff F(a) = 0$ (IA: $a = 0$ trivial).

Beweis: $G(a) = 0 \iff 0 \notin G[Q(a)]$

$\iff$ für alle $b \in Q(a) \subseteq \{b | b < a\}$ ist $G(b) \neq 0$

$\overset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow}$ für alle $b \in Q(a)$ ist $F(b) \neq 0$.
$\Longleftrightarrow$ $0 \notin F[Q(a)]$.
$\Longleftrightarrow$ $F(a) = 0$ □

Beispiel 1: Sei $Q_\infty(n) = \{i | i < n\}$. Sei G die Grundey-Funktion von $(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)$
Behauptung: $G(n) = n$.
Beweis: (Induktion über $(\mathbb{N}, \leq)$)
$G(n) = \min(\mathbb{N} \setminus G[Q(n)]) = \min(\mathbb{N} \setminus G[\{i|i<n\}]) \overset{\text{IV}}{=} \min(\mathbb{N} \setminus \{i|i<n\}) = n$.

Beispiel 2: Sei $Q_3(n) = \{i < n | i + 3 \geq n\}$. Sei G die Grundey-Funktion von $(\mathbb{N}, \leq, Q_3)$.

Behauptung: $G(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } n = 4k \\ 1 & \text{für } n = 4k+1 \\ 2 & \text{für } n = 4k+2 \\ 3 & \text{für } n = 4k+3 \end{array} \right\} = n \mod 4.$

Gegeben seien zwei Spiele $(P_1, \leq, Q_1)$ und $(P_2, \leq, Q_2)$ mit Grundey-Funktion G_1 bzw. G_2. Sei G die Grundey-Funktion von $(P_1, \leq, Q_1) \times (P_2, \leq, Q_2)$.
Frage: Kann man G aus G_1 und G_2 berechnen?
Antwort: Ja, aber etwas ungewöhnlich:
Wir definieren dazu eine Verknüpfung $\vartriangle$ zwischen natürlichen Zahlen: Sei $n = \sum_{i \in N} 2^i$ und sei $m = \sum_{i \in M} 2^i$,
dann sei $n \vartriangle m := \sum_{i \in N \vartriangle M} 2^i$, $N \vartriangle M = (N \cup M) \setminus (N \cap M) = (N \setminus M) \cup (M \setminus N)$.

Lemma 2 Sei $n, m, k \in \mathbb{N}$, dann gilt:
1. $(n \vartriangle m) \vartriangle k = n \vartriangle (m \vartriangle k)$
2. $n \vartriangle m = m \vartriangle n$
3. $m \vartriangle m = 0$, $0 \vartriangle m = m$
4. $n \vartriangle m = n \vartriangle k \implies m = k$
5. $n < m \vartriangle k \implies (n \vartriangle m < k$ oder $n \vartriangle k < m)$

Beweis: Sei $n = \sum_{i \in N} 2^i$, $m = \sum_{i \in M} 2^i$, $k = \sum_{i \in K} 2^i$.
$N \vartriangle M = (M \cup N) \setminus (M \cap N) = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.
1. bis 4. sind klar.
zu 5.)
Behauptung 1: $A, B \subset\subset \mathbb{N}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und sei $l = \max(A \cup B)$.
Ist $l \in B$, dann ist $\sum_{i \in A} 2^i < \sum_{i \in B} 2^i$.
$A \cup B \subseteq \{i | i \leq l\}$. Da $l \in B \implies A \subseteq \{i | i < l\}$,also $\sum_{i \in A} 2^i \leq \sum_{i < l} 2^i < 2^l \leq \sum_{i \in B} 2^i$.
Behauptung 2: Sei $C, D \subset\subset \mathbb{N}$, und sei $l = \max(C \vartriangle D)$. Ist $l \in D$, dann ist $\sum_{i \in C} 2^i < \sum_{i \in D} 2^i$.
$\sum_{i \in C} 2^i = \sum_{i \in C \cap D} 2^i + \sum_{i \in C \setminus D} 2^i$.
$\sum_{i \in D} 2^i = \sum_{i \in C \cap D} 2^i + \sum_{i \in D \setminus C} 2^i$.
Da $l \in D \implies l \in D \setminus C \overset{\text{Beh. 1}}{\implies} \sum_{i \in C \setminus D} 2^i < \sum_{i \in D \setminus C} 2^i \implies$ Behauptung 2
Sei $A = M \vartriangle K$, $l = \max(A \vartriangle N) = \max(M \vartriangle K \vartriangle N)$.
Nach Voraussetzung ist $\sum_{i \in N} 2^i < \sum_{i \in M \vartriangle K} 2^i = \sum_{i \in A} 2^i$.
Also ist nach Behauptung 2 $l \notin N$ und somit $l \in A = M \vartriangle K \implies l \in M \setminus K$ oder $l \in K \setminus M$.
Sei o.B.d.A. $l \in M$. Sei $B = N \vartriangle K$. Dann ist $B \vartriangle M = N \vartriangle K \vartriangle M$.
Also ist nach Behauptung 2 $\sum_{i \in N \vartriangle K} 2^i = \sum_{i \in B} 2^i < \sum_{i \in M} 2^i$, also $n \vartriangle k < m$. □

Sei $(P, \leq Q)$ ein Spiel, dann ist $G : P \to \mathbb{N}$ definiert durch $G(a) = \min(\mathbb{N} \setminus G[Q(a)])$. G heißt Grundey-Funktion.

Satz 3 Seien $(P_1, \leq, Q_1)$ und $(P_2, \leq, Q_2)$ Spiele min Grundey-Funktionen G_1 bzw. G_2.
Dann gilt für die Grundey-Funktion G von $(P_1 \leq, Q_1) \times (P_2, \leq, Q_2)$: $G((a,b)) = G_1(a) \vartriangle G_2(b)$.
Beweis: (Induktion über $(P_1 \times P_2, \leq)$)
$(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq c,\ b \leq d$.
$G((a,b)) = \min(\mathbb{N} \setminus G[Q((a,b))])$, $G[Q((a,b))] = \{G((c,d)) | (c,d) \in Q((a,b))\}$
$\overset{\text{Def. Q}}{=} \{G((a,d)) | d \in Q_2(b)\} \cup \{(G((c,b)) | c \in Q_1(a)\}$
$\overset{\text{I.V.}}{=} \{G_1(a) \vartriangle G_2(d) | d \in Q_2(b)\} \cup \{G_1(c) \vartriangle G_2(b) | c \in Q_1(a)\}$
Zu zeigen:
1.) $G_1(a) \vartriangle G_2(b) \notin G[Q((a,b))]$
2.) Ist $n < G_1(a) \vartriangle G_2(b)$, dann ist $n \in G[Q((a,b))]$
zu 1.) Nach Definition von G_1 und G_2 gilt:

a) $G_1(c) \neq G_1(a)$ für $c \in Q_1(a)$
b) $G_2(d) \neq G_2(b)$ für $d \in Q_2(b)$
Nach Lemma 2.4 ist dann
a) $G_1(c) \vartriangle G_2(b) \neq G_1(a) \vartriangle G_2(b)$ für $c \in Q_1(a)$
b) $G_1(a) \vartriangle G_2(d) \neq G_1(a) \vartriangle G_2(b)$ für $d \in Q_2(b)$

zu 2.) Da $n < G_1(a) \vartriangle G_2(b)$, ist nach Lemma 2.5 $n \vartriangle G_1(a) < G_2(b)$ oder $n \vartriangle G_2(b) < G_1(a)$.
Sei o.B.d.A. $G_1(a) \vartriangle n < G_2(b)$.
Nach Definition von G_2 gibt es ein $d \in Q_2(b)$ mit $G_2(d) = G_1(a) \vartriangle n$.
Also ist $G_1(a) \vartriangle G_2(d) = G_1(a) \vartriangle G_1(a) \vartriangle n = 0 \vartriangle n = n$. □

Beispiel 3: Sei $Q_\infty(n) = \{i | i < n\}$. Sei $(P, \leq, Q) = (\mathbb{N}, \leq, Q_\infty) \times (\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)$.

Gegeben seien 2 Haufen von Streichhölzern. Jeder Spieler muß mindestens ein Streichholz nehmen, er darf nur von einem Haufen Streichhölzer nehmen.

Die Grundey-Funktion G_∞ von $(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)$ hat die Eigenschaft $G_\infty(n) = n$.
Es gilt dann für die Grundey-Funktion G von $(P, \leq, Q)$:
$G((n,m)) = G_\infty(n) \vartriangle G_\infty(m) = n \vartriangle m$.
$Kern(P, \leq, Q) = \{(n,m) | G(n,m) = 0\} = \{(n,n) | n \in \mathbb{N}\}$.
Die Gewinnstrategie lautet: *Mache beide Haufen gleich groß.*

Sei $(n_i)_{i<k}$ ein Folge natürlicher Zahlen. Wir definieren $\underset{i<0}{\vartriangle} n_i := 0$, $\underset{i<k+1}{\vartriangle} := (\underset{i<k}{\vartriangle} n_i) \vartriangle n_k$.

Satz 4 Sei $(P, \leq, Q)$ ein Spiel mit Grundey-Funktion G. Sei G_D die Grundey-Funktion von $(P, \leq, Q)^D$. Dann gilt für $g \in P^D$: $G_D(g) = \underset{d \in D}{\vartriangle} G(g(d))$.

Beweis: (Induktion über $|D|$)
Ist $D = \emptyset$, dann ist $P^D = \emptyset$ und somit $G_D = \emptyset$. $\surd$
Ist $|D| > 0$. Sei $c \in D$ und sei $E = D \setminus \{c\}$.
Dann ist nach I.V. die Grundey-Funktion G_E von $(P, \leq, Q)^E$ $G_E(g) = \underset{d \in E}{\vartriangle} G(g(d))$

Sei $\varphi : \begin{cases} P^D & \rightarrow & P^E \times P \\ g & \mapsto & (g \restriction E, g(c)) \end{cases}$

Dann ist φ ein Isomorphismus zwischen $(P^D, \leq, Q_D)$ und $(P^E, \leq, Q_E) \times (P, \leq, Q)$.
Also ist $G_D(g) = G_E(g \restriction E) \vartriangle G(g(c)) = \underset{d \in E}{\vartriangle} G(g(d)) \vartriangle G(g(c)) = \underset{d \in D}{\vartriangle} G(g(d))$. □

Lemma 5 Sei $(n_l)_{l<k}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_l = \sum_{i \in N_l} 2^i$ für $l < k$.
Sei $N := \{i | \ |\{l < k | i \in N_l\}| \text{ ungerade}\}$. Dann ist $\underset{l<k}{\vartriangle} n_l = \sum_{i \in N} 2^i$.

Beweis: (Induktion über k)
$k = 0$ $\surd$
Sei $n = \underset{l<k+1}{\vartriangle} n_l = (\underset{l<k}{\vartriangle} n_l) \vartriangle n_k$.
Sei $M = \{i | \ |\{l < k | i \in N_l\}| \text{ ist ungerade}\}$. Dann ist nach I.V.:
$\underset{l<k}{\vartriangle} n_l = \sum_{i \in M} 2^i =: m$.
Somit ist $n = m \vartriangle n_k = \sum_{i \in M \vartriangle N_k} 2^i$.
Also gilt: $i \in M \vartriangle N_k \iff i \in M \setminus N_k$ oder $i \in N_k \setminus M$
$\iff$ ($|\{l < k | i \in N_l\}|$ ist ungerade und $i \notin N_k$ oder $i \in N_k$ und $|\{l < k | i \in N_l\}|$ ist gerade)
$\iff$ $|\{l \leq k | i \in N_l\}|$ ist ungerade. □

Folgerung 6 Sei $(P, \leq, Q)$ ein Spiel mit Grundey-Funktion G. Dann sind äquivalent:
1) $g \in Kern(P, \leq, Q)^D$
2) $\forall i \in \mathbb{N}$ ist $|\{d \in D | i \in N_d\}|$ gerade mit $G(g(d)) = \sum_{i \in N_d} 2^i$

Beispiel 4: Sei $D = \{1,2,3,4\}$. Sei $Q_\infty(n) = \{i | i < n\}$ und $(P, \leq, Q) = (\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)^D$.

Gegeben seien 4 Haufen. Jeder Spieler muß mindestens ein Streichholz nehmen. Er darf nur von einem Haufen Streichölzer nehmen.

$G_D(g) = G_\infty(g(1)) \vartriangle G_\infty(g(2)) \vartriangle G_\infty(g(3)) \vartriangle G_\infty(g(4)) = g(1) \vartriangle g(2) \vartriangle g(3) \vartriangle g(4)$.
Also sind äquivalent:
1) $g \in Kern(P, \leq, Q)$
2) Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $|\{d \in D | i \in N_d\}|$ gerade

Marienbad-Spiel:
$g(1) = 1,\ g(2) = 3,\ g(3) = 5,\ g(4) = 7$
$N_1 = \{0\},\ N_2 = \{0,1\},\ N_3 = \{0,2\},\ N_4 = \{0,1,2\}$ (Exponenten der Dualzahlentwicklung)

Dann ist $\{d \in D | i \in N_d\} = \begin{cases} \{1,2,3,4\} & i = 0 \\ \{2,4\} & i = 1 \\ \{3,4\} & i = 2 \\ \emptyset & i > 2 \end{cases}$

Also ist $g \in Kern(\mathbb{N}, \leq, Q_\infty)^D$.

4.4 Satz von Ramsey

Sei A eine Menge. Eine Funktion $f : A \to \{0,1\}$ heißt **Partition** von A **in zwei Teile**.

Schubfachprinzip: Ist A unendlich und f eine Partition von A in zwei Teile, dann gilt:
$\{a|f(a) = 0\}$ ist unendlich oder $\{a|f(a) = 1\}$ ist unendlich.

Sei A eine Menge und f eine Partition von $\mathcal{P}_2(A) = \{\{a,b\}|a,b \in A \text{ und } a \neq b\}$.
Wir werden zeigen: Ist A unendlich, dann gibt es ein unendliches $X \subseteq A$ mit $f \restriction \mathcal{P}_2(X)$ ist konstant.

Anschaulich: Wir betrachten die Graphen $(A, \mathcal{P}_2(A))$. Wir färben die Kanten in zwei Farben. Dann gibt es einen (vollständigen) unendlichen Teilgraphen $(X, \mathcal{P}_2(X))$, so daß alle Kanten gleich gefärbt sind.

Wir benötigen den Begriff des **Ultrafilters**.
Sei $D \subseteq \mathcal{P}(A) = \{B|B \subseteq A\}$. D heißt **Filter**, wenn
1. $X \cap Y \in D$ für alle $X, Y \in D$
2. $X \subseteq Y,\ X \in D \implies Y \in D$
3. $\emptyset \notin D$

D heißt Ultrafilter, wenn zusätzlich gilt:
4. Ist $X \subseteq A \implies X \in D$ oder $A \setminus X \in D$

S heißt **freier** (Ultra-) **Filter**, wenn gilt:
5. $\forall a \in A$ ist $\{a\} \notin D$

Beispiele:
a) Sei $a \in A$. Dann ist $\{X|a \in X\}$ ein Ultrafilter.
b) Sei A unendlich. Dann ist $\mathfrak{F} = \{X|A \setminus X \text{ ist endlich}\}$ ein Filter. (Freche-Filter)

Satz 1 Ist E ein Filter auf A, dann gibt es einen Ultrafilter $D \supseteq E$ auf A.
Beweisskizze:
Behauptung 1: Ist D ein Filter auf A und $X \subseteq A$, dann gibt es ein Filter $E \supseteq D$ mit:
$X \in E$ oder $A \setminus X \in E$.
Behauptung 2: Ist $\mathfrak{K}$ eine Kette von Filtern, dann ist $\bigcup \mathfrak{K}$ ein Filter.
Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\{D|D \text{ ist ein Filter auf } A\}$ ein maximales Element D.
Nach Behauptung 1 ist D dann ein Ultrafilter. □

Folgerung 2 1. Ist A unendlich, dann gibt es einen freien Ultrafilter auf A.
2. Ist D ein freier Ultrafilter auf A und $X \in D$, dann ist $|X|$ unendlich.
Beweis: zu 1.: Sei $D \supseteq \{X|A \setminus X \text{ ist endlich}\}$ ein Ultrafilter.
zu 2.: Angenommen, es gibt ein $X \in D$ mit $|X|$ ist endlich.
Wähle X mit $|X|$ minimal. Dann ist $X \neq \emptyset$, da $\emptyset \notin D$.
Sei $a \in X$. Da D frei ist, ist $\{a\} \notin D$.
Da D Ultrafilter ist, ist $A \setminus \{a\} \in D$.
Da D Filter ist, ist dann $X \cap A \setminus \{a\} = X \setminus \{a\} \in D$ # zur Wahl von X. □

Satz 3 (Ramsey)
Sei A eine unendliche Menge und sei f eine Partition von $\mathcal{P}_n(A) = \{H|H \subset\subset A \text{ und } |H| = n\}$ in zwei Teile, dann gibt es ein $X \subseteq A,\ X$ unendlich und $f \restriction \mathcal{P}_n(X)$ ist konstant.
Beweis: Zunächst setzen wir $f : \mathcal{P}_n(A) \to \{0,1\}$ auf $\{H|H \subseteq A \text{ und } |H| \leq n\}$ fort.
Dazu wählen wir einen Ultrafilter D auf A. D sei frei.
Wir setzen $g(H) = f(H)$ falls $|H| = n$.
Angenommen, für alle $H \in \mathcal{P}_i(A)$ mit $i \leq n$ sei $g(H)$ bereits definiert.
Sei $H \in \mathcal{P}_{i-1}(A)$, dann sei $H_1 = \{x \in A \setminus H | g(H \cup \{x\}) = 1\},\ H_0 = \{x \in A \setminus H | g(H \cup \{x\}) = 0\}$.
Dann ist $H \cup H_1 \cup H_0 = A$. Da H endlich ist, ist $H \notin D \implies H_1 \cup H_0 \in D$.
Angenommen $H_1 \notin D \implies A \setminus H_1 \in D \implies (H_1 \cup H_0) \cap (A \setminus H_1) = H_0 \in D$
Ebenso folgt: Ist $H_0 \notin D \implies H_1 \in D$.

Ferner ist $H_1 \cap H_0 = \emptyset$. Also gilt:
Behauptung 1: Es gibt ein $i \in \{0,1\}$ mit $H_i \in D$.
Sei $g(H) = \begin{cases} 1 & \text{falls } H_1 \in D \\ 0 & \text{falls } H_0 \in D \end{cases}$
Dann ist $g : \{H \subset\subset A|\ |H| \leq n\} \to \{0,1\}$.

Also ist $g(\emptyset)$ definiert. Sei o.B.d.A. $g(\emptyset) = 0$.
Wir werden zeigen:

Es gibt $X \subseteq A$ unendlich, so daß $g(H) = 0$ für alle $H \subseteq X,\ |H| \leq n$.
Dazu definieren wir eine Folge $(X_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von A mit:

Für alle $H \subset\subset X_l,\ |H| \leq n$ ist $g(H) = 0$.

Sei $X_0 = \emptyset$.
Angenommen, X_l ist bereits gewählt. Dann gilt für jedes $H \subseteq X_l$ mit $|H| < n$:

$g(H) = 0$, d.h. $H_0 = \{x \in A \setminus X | g(H \cup \{x\}) = 0\} \in D$.

Sei $S = \bigcap\{H_0 | H \subseteq X_l \text{ und } |H| < n\} \in D$. Sei $x \in S$ und $X_{l+1} = X_l \cup \{x\}$.
Dann gilt für alle $H \subseteq X_{l+1}$ mit $|H| \leq n :\ g(H) = 0$.
Sei schließlich $X = \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} X_l$. Dann ist X unendlich und für alle $H \subseteq X$ mit $|H| \leq n$ ist $g(H) = 0$.
Da $g \restriction \mathcal{P}_n(A) = f$ ist, ist $f \restriction \mathcal{P}_n(A)$ konstant mit Wert 0. □

Folgerung 4 Sei $f : \mathcal{P}_n(A) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Dann gibt es ein unendliches $X \subseteq A$ mit $f \restriction \mathcal{P}_n(X)$ ist konstant.
Beweis: (Induktion über k)

Sei $g : \begin{cases} \mathcal{P}_n(X) & \to & \{0,1\} \\ H & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{falls } f(H) < k-1 \\ 1 & \text{falls } f(H) = k-1 \end{cases} \end{cases}$

Dann gibt es ein unendliches $Y \subseteq A$ mit $g \restriction \mathcal{P}_n(Y)$ ist konstant.
1. Fall: $g(H) = 1$ für $H \in \mathcal{P}_n(Y)$. Dann sei $X = Y$.
2. Fall: Sonst gibt es nach IV ein unendliches $X \subseteq Y$ mit $f \restriction \mathcal{P}_n(X)$ ist konstant. □

Index

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

15.4.1997

1. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Beweisen Sie die folgenden Formeln für Binomialkoeffizienten:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für $n \geq 1$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$

2. In einer Schule werden $2n$ Fächer unterrichtet. Alle Schüler(innen) sind hervorragend und haben nur Noten aus $\{1, 2\}$. Keine zwei Zeugnisse sind gleich und alle sind gleich gut. Dann gilt für die Anzahl t_n der Schüler(innen): $t_n \leq \binom{2n}{n}$.

3. Auf wieviele Arten kann man aus dem nebenstehenden Schema (von oben nach unten fortschreitend) das Wort Kombinatorik ablesen?

```
      K
     O O
    M M M
   B B B B
  I I I I I
 N N N N N N
A A A A A A A
 T T T T T T
  O O O O O
   R R R R
    I I I
     K K
```

4. Beim Zahlenlotto spielt jemand eine Systemwette, bei der für $6 \leq n \leq 49$ der Zahlen systematisch alle $\binom{n}{6}$ Tipreihen, welche je 6 der n Zahlen enthalten, gewettet werden. Nachher erweisen sich $k \leq 6$ der n Zahlen als richtig ausgewählt.
   Bestimmen Sie die Anzahl $a(n, k, r)$ der Tipreihen dieser Wette, welche genau r richtige Zahlen enthalten.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille 22.4.1997

2. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Gegeben sind 12 Kugeln und 4 Urnen. Gesucht sind die Anzahlen der Möglichkeiten, diese 12 Kugeln auf die 4 Urnen zu verteilen.

   Bestimmen Sie die Anzahlen jeweils für die folgenden Fälle:
   (i) Kugeln und Urnen sind unterscheidbar.
   (ii) Kugeln und Urnen sind nicht unterscheidbar.
   (iii) Kugeln sind nicht unterscheidbar, aber Urnen sind unterscheidbar.
   (iv) Kugeln sind unterscheidbar, aber Urnen sind nicht unterscheidbar.

2. Auf wieviele Arten kann man die 4 Wände eines rechteckigen Zimmers mit 5 verschiedenen Farben streichen, wenn jede Wand einfarbig sein soll und an jeder Zimmerecke verschiedene Farben aneinanderstoßen sollen?

3. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die 26 Buchstaben A,B,C,...,X,Y,Z derart aneinanderzureihen, daß keiner der Namen THEA, LUDWIG und IGOR als Folge unmittelbar aufeinanderfolgender Buchstaben vorkommt.

   Hinweis: Es reicht aus, diese Anzahlen durch gewisse Fakultäten auszudrücken.

4. Bestimmen Sie eine Formel für die Anzahl $t(n, k, m)$ der Möglichkeiten, k verschiedene Kugeln auf n verschiedene Urnen so zu verteilen, daß genau m Urnen leer bleiben.
   Wie lautet die Formel für $m = 0$?
   Berechnen Sie speziell $t(6, 4, 3)$.

Sprechstunden der Mitarbeiter:

Prof. Podewski	Raum B 409	Mi 11 – 12 Uhr
Dr. Wille	Raum G 108	Mi 11 – 12 Uhr
Frau Mattiesch	Raum D 404	nach Vereinbarung

UNIVERSITÄT HANNOVER 29.4.1997
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

3. Hausübung zur **Kombinatorik**

d_n bezeichne die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen der $\mathcal{S}_n$ ($n-$te Rencontre-Zahl).

1. Zeigen Sie, daß die Rencontre-Zahlen die folgenden Rekursionen erfüllen:
   (a) $d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$
   (b) $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$

2. Es sei $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ eine $n \times n$ Matrix. Berechnen Sie (mit kombinatorischen Mitteln) die Determinante von A.

3. In einem Gefängnishof wandern jeden Tag n Sträflinge in einer Reihe im Gänsemarsch umher. Um für Abwechselung zu sorgen, veranlaßt der Aufseher, daß die tägliche Reihenfolge stets so geändert wird, daß jeder Sträfling einen anderen Rücken sieht als am Vortag. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die man täglich für die Wahl der Reihenfolge hat.

4. Sei $F := (F(i) \mid i \in I)$ mit $|I| \in \mathbb{N}$ eine endliche Familie und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq |I|$ gegeben. Zeigen Sie, daß dann äquivalent sind:
   (a) Es existiert ein $J \subseteq I$ mit $|J| \geq n$ derart, daß $F|\, J$ eine injektive Auswahlfunktion besitzt.
   (b) Für alle $K \subseteq I$ gilt: $|F(K)| \geq |K| + n - |I|$.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille 6.5.1997

4. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Das Harem–Problem (moderne Fassung):
   n britische Rinderzüchter stehen fassungslos vor einer großen Rinderherde. Jeder von ihnen soll k ihm persönlich bekannte Tiere zur Schlachtung aussuchen. Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichne R_i die Menge der Rinder, die der Züchter i persönlich kennt. Zeigen Sie, daß die geforderte Schlachtung genau dann möglich ist, wenn für alle $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: $|\bigcup_{i \in I} R_i| \geq k|I|$.

2. Es sei T eine endliche Menge, und $T = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ seien zwei Partitionen von T in nichtleere Mengen (also $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$). Eine $m-$elementige Menge $E \subseteq T$ mit $E \cap A_i \neq \emptyset$ für alle i und $E \cap B_j \neq \emptyset$ für alle j heißt *gemeinsames Repräsentantensystem* für die Partitionen.

   Zeigen Sie, daß zwei Partitionen genau dann ein gemeinsames Repräsentantensystem besitzen, wenn für alle $k = 1, \ldots, m$ und für alle $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = k$ gilt: $(\bigcup_{i \in I} A_i) \supseteq B_j$ für höchstens k Indizes j.

3. Es sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G und m der Index von H in G. Zeigen Sie, daß es dann Elemente $z_1, \ldots, z_m \in G$ gibt mit

   $$G = Hz_1 \cup Hz_2 \cup \ldots \cup Hz_m = z_1H \cup z_2H \cup \ldots \cup z_mH \ ,$$

   also eine Menge $E = \{z_1, \ldots, z_m\}$, die ein Repräsentantensystem sowohl für die Zerlegung von G nach H in rechte als auch in linke Nebenklassen bildet.

4. Sei $H = (H(i) \,|\, i \in I)$ eine Hall-Familie, die eine Hochzeit besitzt. $B \subseteq H(I)$ heißt *begehrt*, wenn für jede Hochzeit f von H gilt: $B \subseteq \mathrm{Nb}\, f$.
   Zeigen Sie:
   Ist $H = (H(i) \,|\, i \in I)$ eine Hall-Familie, die eine Hochzeit besitzt, so sind äquivalent:
   (a) $B \subset\subset H(I)$ ist begehrt.
   (b) Es gibt $K \subset\subset I$ mit $|H(K)| = |K|$ und $B \subseteq H(K)$.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

13.5.1997

5. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Es sei p prim und $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$ teilerfremd. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\mathbb{Z}_p[x]/(f \cdot g) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(f) \times \mathbb{Z}_p[x]/(g)$$

2. Es sei $R_s := \mathbb{Z}_2[x]/(x^s + x + 1)$.
   (a) Untersuchen Sie für $s = 2, 3, 4, 5$, ob R_s ein Körper ist.
   (b) Konstruieren Sie einen Körper aus 8 Elementen (d.h. geben Sie Verknüpfungstafeln für solch einen Körper an).

3. Es sei R ein endlicher Ring. Eine Menge S von Einheiten in R heißt *orthogonal*, falls je zwei verschiedene Elemente aus S orthogonal sind.
   Es sei $N(R) := \max\{|S| \mid S \subseteq R \text{ und } S \text{ orthogonal}\}$.
   (a) Zeigen Sie:
   Sind R_1, R_2 endliche Ringe, so gilt $N(R_1 \times R_2) = \min\{N(R_1), N(R_2)\}$.
   (b) Berechnen Sie $N(R_s)$ $(s = 2, 3, 4, 5)$ für die Ringe aus Aufgabe 1.

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und p die kleinste Primzahl, die n teilt.
   Zeigen Sie: $\quad N(\mathbb{Z}_n) = p - 1$.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

28.5.1997

6. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Untersuchen Sie, ob es ein lateinisches Quadrat gibt, das orthogonal ist zu:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zwei quadratische $n \times n-$Matrizen A, B über $N = \{1, 2, \dots, n\}$ heißen *orthogonal*, falls $(A, B) := ((a_{ij}, b_{ij}))$ jedes Paar aus $N \times N$ genau einmal enthält.
   Sei
   $$Z = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$
   Zeigen Sie:
   Eine Matrix A über N ist genau dann ein lateinisches Quadrat, wenn A orthogonal zu Z und orthogonal zu S ist.

3. Konstruieren Sie jeweils eine vollständige Menge orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung 5 und 8.

   Hinweis: Diese Aufgabe ist als kleine Programmieraufgabe gedacht. Sie sollten ein Programm schreiben, mit dem Sie sich diese lateinischen Quadrate ausdrucken lassen können und dieses dann mit dem Ausdruck der orthogonalen lateinischen Quadrate abgeben.
   Natürlich können Sie die Aufgabe auch "zu Fuß" lösen.

4. Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei lateinische Quadrate der Ordnung n über $\{1, 2, \dots, n\}$. Die Matrix $M = (m_{ij})$ sei definiert durch $m_{ij} := n(a_{ij} - 1) + b_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:
   (a) Für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt $1 \leq m_{ij} \leq n^2$.
   (b) Alle Zeilen- und Spaltensummen von M sind gleich.
   (c) Sind A und B orthogonal, so ist M ein magisches Quadrat.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille 3.6.1997

7. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Zeigen Sie:
   In einer endlichen projektiven Ebene gilt das Dualitätsprinzip, d.h. mit einer wahren Aussage A über Punkte und Geraden ist auch diejenige Aussage wahr, die man aus A durch Vertauschen der Worte "Punkt" und "Gerade" (und sprachlicher Anpassung) erhält.

2. Im Vektorraum K^3 über einem endlichen Körper K sei P die Menge der eindimensionalen Unterräume. Für jeden zweidimensionalen Unterraum U vom K^3 sei g_u die Menge der in U enthaltenen eindimensionalen Unterräume und
   $$G := \{g_u \,|\, U \text{ ist Untervektorraum von } K^3 \text{ mit } \dim U = 2\} \ .$$
   (Im Prinzip ist G die Menge der zweidimensionalen Unterräume vom K^3).
   Zeigen Sie, daß (P, G) eine endliche projektive Ebene der Ordnung $|K| =: n$ ist.

3. Für einen Graphen (P, K) und $q \in P$ sei $S_q := \{r \,|\, \{q, r\} \in K\}$.
   Zeigen Sie:
   Ist $f : P \backslash \{p\} \longrightarrow P \backslash \{p\}$ eine Funktion mit $f(q) \neq q$ und $f(f(q)) = q$ für alle $q \in P \backslash \{p\}$, so gibt es einen Graphen (P, K) mit $S_p = P \setminus \{p\}$ und $S_q = \{p, f(q)\}$ für $q \in P \setminus \{p\}$.

4. P sei eine Menge und $G \subseteq \mathcal{P}(P)$. Für $p \in P$ sei $\overline{p} := \{g \in G \,|\, p \in g\}$. Zeigen Sie:
   Ist $|P| = n^2 + n + 1$, $|\overline{p}| = n + 1 \geq 3$ für alle $p \in P$ und gilt $|g \cap h| = 1$ für alle $g, h \in G$ mit $g \neq h$, so ist (P, G) eine projektive Ebene der Ordnung n.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

17.6.1997

8. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 25 Münzen aus 8 Typen (1 Pf, 2 Pf, 5 Pf, 10 Pf, 50 Pf, 1 DM, 2 DM, 5 DM) derart auszuwählen, daß von jedem Typ mindestens zwei und höchstens sechs Münzen vorhanden sind.

2. (a) Auf einer Kreislinie sind $2n$ Punkte gezeichnet. Je zwei sollen durch Strecken verbunden werden, und zwar so, daß keine Schnittpunkte von Strecken auftreten.
   Zeigen Sie, daß dies auf D_{n+2} Arten möglich ist.

   (b) Betrachten Sie Polygone aus $2n$ Streckenzügen der Länge 1 im 1. Quadranten des Koordinatensystems, die die Punkte $(0,0)$ und (n,n) verbinden.
   Zeigen Sie, daß die Anzahl solcher Polygone, die außer $(0,0)$ und (n,n) keinen Punkt (x,x) enthalten, gleich $2D_{n+1}$ ist.

3. Es sei $p(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n als Summe natürlicher Zahlen (> 0) zu schreiben – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Ferner sei $G(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(n)x^n$.

   Zeigen Sie: $\quad G(x) = \prod_{i \geq 1}(1 - x^i)^{-1}$.

   Berechnen Sie mit Hilfe von $G(x)$ die Zahlen $p(1), \ldots, p(5)$.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

17.6.1997

9. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Folgen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{0, 1, 2\}$, für $i = 1, \ldots, n$, die eine ungerade Anzahl von Nullen enthalten.

2. (a) Auf einer Kreislinie sind $2n$ Punkte gezeichnet. Je zwei sollen durch Strecken verbunden werden, und zwar so, daß keine Schnittpunkte von Strecken auftreten.
Zeigen Sie, daß dies auf g_{n+1} Arten möglich ist.

   (b) Betrachten Sie Polygone aus $2n$ Streckenzügen der Länge 1 im 1. Quadranten des Koordinatensystems, die die Punkte $(0, 0)$ und (n, n) verbinden.
Zeigen Sie, daß die Anzahl solcher Polygone, die außer $(0, 0)$ und (n, n) keinen Punkt (x, x) enthalten, gleich $2g_n$ ist.

3. (**Turm von Hanoi**)

   Auf dem linken Stab liegen n paarweise unterschiedlich große Scheiben, wobei nur kleinere über größeren Scheiben liegen. Diese n Scheiben sollen in gleicher Ordnung auf den mittleren Stab umgelegt werden. Dabei darf jeweils nur eine Scheibe verlegt werden, und auf allen drei Stäben sollen stets nur kleinere Scheiben über größeren Scheiben liegen.
   Zeigen Sie, daß eine Umlegung stets möglich ist, und geben Sie die minimale Anzahl a_n von Umlegungen an.

4. Im $\mathbb{R}^3$ seien n Ebenen in allgemeiner Lage gegeben, d.h.
   (i) sie sind paarweise nicht parallel,
   (ii) je 3 Ebenen haben einen Punkt aber keine Gerade gemeinsam,
   (iii) je 4 Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.

   Leiten Sie eine Rekursion für die Anzahl u_n der Gebiete her, in die der Raum durch diese Ebenen zerlegt wird, und geben Sie u_n unter Benutzung der erzeugenden Funktion $U(x) = \sum u_n x^n$ explizit an.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

24.6.1997

10. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 25 Münzen aus 8 Typen (1 Pf, 2 Pf, 5 Pf, 10 Pf, 50 Pf, 1 DM, 2 DM, 5 DM) derart auszuwählen, daß von jedem Typ mindestens zwei und höchstens sechs Münzen vorhanden sind.

2. Bestimmen Sie die Anzahl f_n der 3-stelligen Dezimalzahlen, die die Quersumme n besitzen $(1 \leq n \leq 27)$, und berechnen Sie speziell f_{11}.

3. Zum Frankieren eines Briefes mit 3 DM Porto stehen 4 Typen von 50 Pf Briefmarken, 3 Typen von 1 DM Briefmarken und 2 Typen von 2 DM Briefmarken jeweils in unbeschränkter Menge zur Verfügung. Auf wieviele unterschiedliche Arten läßt sich der Brief frankieren?

4. Zeigen Sie, daß das folgende BASIC-Programm zur Berechnung der Partitionszahlen $p(n)$ richtig ist.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Podewski, Dr. Wille

1.7.1997

11. Hausübung zur **Kombinatorik**

1. Berechnen Sie den Zykelindex der Diedergruppe D_n.
   Schreiben Sie ihn für D_6 explizit auf und berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Halskettentypen für Halsketten mit 6 Steinen in zwei verschiedenen Farben.

2. Es sei S_n die symmetrische Gruppe, die auf $N = \{1, 2, \dots, n\}$ operiere. Sie induziert eine Permutationsgruppe G auf $N \times N$, indem man für $\tau \in S_n$ die induzierte Permutation $\overline{\tau}$ definiert durch $\overline{\tau}((i,j)) = (\tau(i), \tau(j))$.
   Es sei $I_\tau = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$ der Zykelindex von τ.
   Zeigen Sie, daß für den Zykelindex $I_{\overline{\tau}} = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_{n^2}^{p_{n^2}}$ von $\overline{\tau}$ gilt:
   $$p_k = \sum_{[i,j]=k} (i,j) b_i b_j$$
   Dabei bezeichnet $[i,j]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von i und j, und (i,j) den größten gemeinsamen Teiler von i und j.
   Berechnen Sie mit dieser Formel für $n = 4$ den Zyklenindex der Gruppe G.

3. Auf wieviele Arten können n Personen an einem runden Tisch Platz nehmen, wenn die Plätze nicht numeriert sind?
   Lösen Sie dieses Problem einmal mit einer direkten Abzählung und einmal mit Hilfe des Lemmas von Burnside.

4. Auf wieviele unterscheidbare Arten kann man die 16 Felder des nebenstehenden quadratischen Brettes mit 2 Farben färben?

   Betrachten Sie dabei das Brett einmal als einseitiges Brett und einmal zweiseitig, also durchgefärbt.

Übungen zur **Kombinatorik**; SS 1997

Lösungen 1. Hausübung

Aufgabe 1

a) Wir zählen die $n-$elementigen Teilmengen einer $2n-$elementigen Menge auf zwei Arten ab:

1. direkt: Es gibt $\binom{2n}{n}$ solcher Teilmengen.

2. Wir spalten die $2n-$elementige Menge in zwei Teile mit je n Elementen auf. Eine $n-$elementige Menge der $2n-$elementigen Menge besitzt für ein k mit $0 \leq k \leq n$ gerade k Elemente aus dem 1. Teil sowie $n-k$ Elemente aus den 2. Teil.

Also gibt es $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten. Mit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ folgt nun die Behauptung.

b) Wir spezialisieren die binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ auf

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ und leiten ab:

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} x^{k-1} .$$

Mit $x = 1$ folgt die Behauptung.

c) Induktion über n:

Für $n = 1$ gilt die Gleichung, wie man sofort sieht.

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n-1} (\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} - 1 - (-1)^{n+1}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Die Anzahl der Noten 1 und 2 müssen in allen Zeugnissen übereinstimmen, da alle gleich gut sind. Nehmen wir an, daß in jedem Zeugnis m Einsen und $2n-m$ Zweien vorkommen.Dann gilt:

$$\text{Anzahl der verschiedenen Zeugnisse} = \binom{2n}{m} \quad .$$

Es folgt $t_n \le \binom{2n}{m}$ und die Behauptung folgt aus $\binom{2n}{m} \le \binom{2n}{n}$.
Dazu zeigen wir folgende Eigenschaft der Binomialkoeffizienten:

$$(*) \qquad 1 \le r \le \frac{n}{2}\ ,\ r \in \mathbb{N} \Longrightarrow \binom{n}{r-1} < \binom{n}{r}$$

(Mit $\binom{k}{l} = \binom{k}{k-l}$ folgt dann alles.)
Es gilt:

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(r-1)+1)}{(r-1)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

Wegen $r \le \frac{n}{2}$ folgt $n-r \ge n-\frac{n}{2}$, also $n-r+1 > \frac{n}{2} \ge r$ und $\frac{n-r+1}{r} > 1$. Damit erhält man:

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} < \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)(n-r+1)}{(r-1)!r} = \binom{n}{r} \quad .$$

Aufgabe 3
Wir zeigen zunächst:
Darf man im nebenstehenden Schema von * nur zum jeweils direkt links bzw. rechts darunterstehenden * weiterschreiten, und ist $a(n,k)$ die Anzahl der auf diese Art möglichen verschiedenen Wege von der Spitze bis zum $k-$ten Symbol in der $n-$ten Zeile $(n,k = 0,1,2,\dots)$, so gilt $a(n,k) = \binom{n}{k}$.

```
    *
   * *
  * * *
 * * * *
* * * * *
```

Beweis durch Induktion über n:
$n = 0: \quad a(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$

$n \Longrightarrow n+1$: Zu zeigen ist: Für alle k mit $0 \le k \le n+1$ gilt $a(n+1,k) = \binom{n+1}{k}$.
Für $k = 0$ folgt direkt $a(n+1,0) = 1 = \binom{n+1}{0}$, ebenso $a(n+1,n+1) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.
Für $0 < k \le n$ gilt $a(n+1,k) = a(n,k-1) + a(n,k)$, da man ein Symbol nur über die beiden Symbole rechts und links davon in der Zeile darüber erreichen kann. Nach Induktionsvoraussetzung folgt weiter $a(n+1,k) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Die letzte Gleichung ergibt sich dabei nach Vorlesung.

Fügt man nun unter K K der letzten Zeile ein “Scheinsymbol“ ein, so entsteht eine symmetrische Figur mit Mittelzeile

A A A A A A A .

Nach Obigem läßt sich das $k-$te Symbol dieser Zeile ($k = 0, 1, \ldots, 6$) von oben und von unten auf $\binom{6}{k}$ Arten erreichen. Koppelt man je zwei solcher Wege, entsteht genau eine Lesart für das Wort Kombinatorik. Damit lautet die gesuchte Anzahl

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}\binom{6}{k} = \binom{12}{6} = 924 ,$$

unter Benutzung von Aufgabe 1 a).

Aufgabe 4

Bei einer Tipreihe der Wette mit genau r richtigen Zahlen müssen aus den k richtig ausgewählten Zahlen gerade r genommen werden. Die übrigen $6 - r$ Zahlen des Tips müssen aus den restlichen $n - k$ Zahlen ausgewählt werden, da genau r Zahlen richtig getippt sein sollen.

r Zahlen aus k Zahlen auswählen geht auf $\binom{k}{r}$ Arten.

$6 - r$ Zahlen aus $n - k$ Zahlen auswählen geht auf $\binom{n-k}{6-r}$ Arten.

Durch Koppelung erhält man $a(n, k, r) = \binom{k}{r}\binom{n-k}{6-r}$.

(Interessant sind beim Lotto natürlich nur die $a(n, k, r)$ mit $3 \leq k \leq 6$ und $r \geq 3$.)

Lösungen 2. Hausübung

Aufgabe 1
zu (i):
Für jede Kugel gibt es 4 Möglichkeiten, also ist die Anzahl $= 4^{12} = 16\,777\,216$.

zu (ii):
Hierbei geht es um Zerlegungen der Zahl 12 in höchstens 4 Summanden, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt. Man überlegt sich leicht, daß es 34 solche Zerlegungen der Zahl 12 in höchstens 4 Summanden gibt.

zu (iii):
Hierbei geht es um Zerlegungen der Zahl 12 in höchstens 4 Summanden mit Berücksichtigung der Reihenfolge.
Wir betrachten die 12 Kugeln und 4 Plätze (Urnen) $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Ziehen wir nun 12-mal hintereinander einen Platz aus N, auf den wir dann eine Kugel legen, und legen anschließend die Platznummer zurück, so entsteht insgesamt eine Verteilung der Kugeln auf die 4 Plätze (Urnen) mit Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. die Urnen werden unterschieden. Also ist die gesuchte Anzahl A gleich der Anzahl der 12-Auswahlen einer 4-elementigen Menge. Nach Vorlesung folgt

$$A = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = 455\ .$$

zu (iv):
Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl der Zerlegungen einer 12-elementigen Menge in höchstens 4 Teilmengen. Bezeichnet man mit $S(n,k)$ die Anzahl der Zerlegungen einer n-elementigen Menge in genau k Teilmengen, so gilt also für die Anzahl A:

$$A = S(12,1) + S(12,2) + S(12,3) + S(12,4)\ .$$

Die Zahlen $S(n,k)$ sind die STIRLINGschen Zahlen 2. Art, die in der Übungsstunde eingeführt wurde. Man erhält mit den dort bewiesenen Formeln:

$$A = 1 + 2047 + 86\,526 + 611\,501 = 700\,075\ .$$

Aufgabe 2
Wir benutzen das Siebtheorem, wobei wir setzen:
$N =$ Menge aller Färbungen des Zimmers, sowie
$N_i =$ Menge der Färbungen, bei denen in Ecke i gleiche Farben aneinanderstoßen ($i = 1, 2, 3, 4$).
Die gesuchte Anzahl sei a. Es gilt nach Vorlesung:

$$a = \mathcal{W}(0) - \mathcal{W}(1) + \mathcal{W}(2) - \mathcal{W}(3) \quad \text{mit } \mathcal{W}(i) = \sum_{S \in P_i(\{1,2,3,4\})} \Big|\bigcap_{i \in S} N_i\Big|\ .$$

Wir berechnen $|\bigcap_{i\in S} N_i|$:
$|N| = 5^4$, $|N_i| = 5^3$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $|N_i \cap N_j| = 5^2$ für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $i \neq j$.
Stoßen an drei Ecken gleiche Farben aneinander, so ist das Zimmer einfarbig gefärbt, d.h. :
$|N_i \cap N_j \cap N_k| = |N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4| = 5$ (i, j, k paarweise verschieden). Es folgt:

$$a = 5^4 - 4 \cdot 5^3 + \binom{4}{2} \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 5 = 260$$

Aufgabe 3
Bezeichnungen: $Al := \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$. Zu einer Menge A bezeichne $S(A)$ die Menge der Permutationen von A. S_{ABC} bezeichne die Menge der Permutationen aus $S(Al)$, in denen ABC als Folge unmittelbar aufeinanderfolgender Buchstaben vorkommt. Die gesuchte Anzahl sei a.
Wir wenden nun das Siebtheorem an mit
$N = S(Al)$, $N_1 = S_{THEA}$, $N_2 = S_{LUDWIG}$, $N_3 = S_{IGOR}$.
Dann folgt nach Vorlesung:

$$a = |N| - (|N_1| + |N_2| + |N_3|) + (|N_1 \cap N_2| + |N_1 \cap N_3| + |N_2 \cap N_3|) - |N_1 \cap N_2 \cap N_3|$$

$|N| = |S(Al)| = 26!$
$|N_1| = |S_{THEA}| = 23!$, denn man kann THEA als einen Buchstaben auffassen, da T, H, E und A direkt aufeinanderfolgen müssen. Entsprechend folgt:
$|N_2| = 21!$ und $|N_3| = 23!$.
In $N_1 \cap N_2$ liegen die Permutationen, die sowohl THEA als auch LUDWIG als direkt aufeinanderfolgende Buchstaben enthalten. Faßt man diese Folgen wieder als einen Buchstaben auf, so können also $26 - 4 - 6 + 1 + 1 = 18$ Symbole permutiert werden. Also $|N_1 \cap N_2| = 18!$. Entsprechend $|N_1 \cap N_3| = 20!$.
Etwas aufpassen muß man bei $|N_2 \cap N_3|$: Kommen LUDWIG und IGOR als direkt aufeinanderfolgende Buchstaben vor, so muß die Permutation die Buchstabenfolge LUDWIGOR enthalten, da das Ende von LUDWIG mit dem Anfang von IGOR übereinstimmt. Also können $26 - 8 + 1 = 19$ Elemente permutiert werden, d.h. $|N_2 \cap N_3| = 19!$.
Entsprechend folgt $|N_1 \cap N_2 \cap N_3| = (26 - 4 - 8 + 1 + 1)! = 16!$. Damit ist

$$a = 26! - 2 \cdot 23! - 21! + 18! + 20! + 19! - 16! = 403\,239\,708\,563\,114\,253\,422\,592\,000\,.$$

Aufgabe 4
Wieder wird das Prinzip von Inklusion und Exklusion verwendet:
Sei $N =$ Menge der Belegungen der n Urnen mit k Kugeln und
$N_i =$ Menge der Belegungen der n Urnen mit k Kugeln, so daß Urne i leer bleibt $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
Dann ist $t(n, k, m)$ die Anzahl der Elemente von N, die in genau m der Mengen N_i liegen und nach Vorlesung gilt

$$t(n,k,m) = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \mathcal{W}(i)$$

mit $\mathcal{W}_i = \sum_{S \in P_i(\{1,\ldots,n\})} |(\bigcap_{j \in S} N_j)|$. Für ein $S \in P_i(\{1, \ldots, n\})$ ist aber $|(\bigcap_{j\in S} N_j)|$ gerade die Anzahl der Belegungen der n Urnen mit k Kugeln, so daß mindestens die durch S gegebenen Urnen leer bleiben. Diese Anzahl ist leicht bestimmbar. Die k Kugeln können nämlich auf die restlichen $n - i$ Urnen beliebig verteilt werden. Das geht auf $(n - i)^k$ Arten. $S \in P_i(\{1, \ldots, n\})$ ist auf $\binom{n}{i}$ Arten wählbar. Also ist $\mathcal{W}(i) = \binom{n}{i} (n-i)^k$ und

$$\begin{aligned} t(n,k,m) &= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \binom{n}{i} (n-i)^k \\ &= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} \binom{n}{m+i} (n-m-i)^k \\ &= \binom{n}{m} \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{n-m}{i} (n-m-i)^k\,, \end{aligned}$$

da $\binom{m+i}{m}\binom{n}{m+i} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{i}$.

Für $m = 0$ erhält man

$$t(n,k,0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k \ ,$$

und man erkennt, daß sich genau die Formel für die Anzahl der surjektiven Funktionen einer $k-$elementigen Menge auf eine $n-$elementige Menge ergibt (siehe Übungsstunde 22.4.97).

Speziell:

$$t(6,4,3) = \binom{6}{3}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^4 = 20(81 - 3 \cdot 16 + 3) = 720 \ .$$

Lösungen 3. Hausübung

Aufgabe 1

Es ist $d_n = n!\sum_{t=0}^{n}(-1)^t\frac{1}{t!}$.

a)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)!\sum_{t=0}^{n+1}(-1)^t\frac{1}{t!} \\ &= (n+1)n!\sum_{t=0}^{n}(-1)^t\frac{1}{t!} + (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= (n+1)d_n + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= nd_n + d_n + (-1)^{n+1} \qquad \text{nach a)} \\ &= nd_n + nd_{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

A hat folgendes Aussehen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ folgt hier $\det A = \sum_{\sigma\in S_n'} \operatorname{sgn}\sigma$, wobei S_n' die Menge der fixpunktfreien Permutationen der S_n ist.

Wir bestimmen zunächst die Anzahl a_n der fixpunktfreien geraden Permutationen.

Mit $N := A_n$ (alternierende Gruppe) und $N_i := \{\pi \in N | \pi(i) = i\}$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt nach dem Siebtheorem

$$a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{S\in P_i(\{1,\ldots,n\})} |\bigcap_{j\in S} N_j| \,.$$

Wie bei der Herleitung der Rencontre-Zahlen erhält man:

$$\sum_{S\in P_i(\{1,\ldots,n\})} |\bigcap_{j\in S} N_j| = \begin{cases} 1 & \text{für } i = n \\ n & \text{für } i = n-1 \\ \binom{n}{i}\frac{(n-i)!}{2} & \text{für } i = 0,1,2,\ldots,n-2 \end{cases}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(n-i)!}{2} + (-1)^{n-1}\cdot n + (-1)^n \cdot 1 \\ &= n!\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\frac{1}{2i!} + (-1)^{n-1}\cdot n + (-1)^n \,. \end{aligned}$$

Ist u_n die Anzahl der fixpunktfreien ungeraden Permutationen, so gilt $u_n = d_n - a_n$. Damit folgt

$$\det A = a_n - u_n = a_n - (d_n - a_n) = 2a_n - d_n = \ldots = (-1)^{n-1}\cdot(n-1) \,.$$

Aufgabe 3
Wir betrachten die Reihenfolge vom Vortag und numerieren die Sträflinge gemäß dieser Reihenfolge mit $1, 2, \dots, n$ durch. Sträfling 1 sei dabei der Letzte und Sträfling n der Erste dieser Reihe. Dann ist die gesuchte Anzahl offensichtlich gleich der Kardinalität der Menge

$$N := \{\pi \in S_n \mid \text{für alle } i < n \text{ ist } \pi(i+1) \neq \pi(i) + 1\} .$$

Für alle $k \in \{1, 2, \dots, n-1\} =: \mathbb{N}_{n-1}$ sei

$$N_k := \{\pi \in S_n \mid \text{es existiert ein } i < n \text{ mit } \pi(i) = k \text{ und } \pi(i+1) = k+1\} .$$

Dann ist offenbar $N = S_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} N_k$. Setzt man $a_i := \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i < n} |N_{k_1} \cap \dots \cap N_{k_i}|$ für alle $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, so ergibt sich mit der Siebformel $|N| = n! + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_i$.
Wir bestimmen nun a_i für alle $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Es gibt $\binom{n-1}{i}$ Möglichkeiten, $k_1, \dots, k_i \in \mathbb{N}_{n-1}$ mit $k_1 < \dots < k_i$ zu wählen. Setze $X := \mathbb{N}_n \setminus \{k_1 + 1, \dots, k_i + 1\}$. Dann ist $|X| = n - i$. Sei $\varphi = (j_1, \dots, j_{n-i})$ eine Permutation von X. Wir konstruieren eine Permutation ψ von $\mathbb{N}_n$ wie folgt: Sei $r \leq n - i$. Ist $j_r = \max X$, so ersetze j_r durch die Folge $j_r, j_r + 1, \dots, n$. Ansonsten sei s das kleinste Element in X, das größer als j_r ist. Ersetze dann j_r durch $j_r, j_r + 1, \dots, s - 1$ (wir schließen also die "Lücken" von X). Offenbar ist die Zuordnung $\varphi \mapsto \psi$ eine Bijektion von der Menge der Permutationen von X auf $N_{k_1} \cap \dots \cap N_{k_i}$. Es folgt $|N_{k_1} \cap \dots \cap N_{k_i}| = (n-i)!$, also $a_i = \binom{n-i}{i} (n-i)!$.
Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} |N| &= n! + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-i}{i} (n-i)! \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (n-i)! = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{n-i}{i!} . \end{aligned}$$

Aufgabe 4
(a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $J \subseteq I$ mit $|J| \geq n$ und $(a_i)_{i \in J}$ eine injektive Auswahlfunktion von $F|\,J$. Sei ferner $K \subseteq I$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |F(K)| &\geq |\cup \{F(j) | j \in K \cap J\}| \geq |\{a_i | i \in K \cap J\}| = |K \cap J| \\ &= |K| - |K \setminus J| \geq |K| - |I \setminus J| = |K| - (|I| - |J|) \geq |K| + n - |I| \end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Es gelte (b).
Wähle eine beliebige Menge T mit $|T| = |I| - n$ und $T \cap F(I) = \emptyset$. Setze $F'(i) := F(i) \cup T$ für alle $i \in I$. Wir zeigen, daß $F' := (F'(i) \mid i \in I)$ die Hallsche Bedingung erfüllt.
Sei $K \subseteq I$. Ist $K = \emptyset$, so ist sicherlich $|F'(K)| = 0 \geq |K|$. Sei nun $K \neq \emptyset$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |F'(K)| &= |T \cup F(K)| = |T| + |F(K)| \geq |T| + |K| + n - |I| \quad \text{nach (b)} \\ &= |K| \quad \text{da } |T| + n = |I| . \end{aligned}$$

Nun liefert der Heiratssatz eine injektive Auswahlfunktion $(a_i)_{i \in I}$ von F'.
Sei nun $J := \{i \in I | a_i \notin T\}$. Da die a_i paarweise verschieden sind, gibt es höchstens $|T|$ Indizes $i \in I$ mit $a_i \in T$. Es folgt $|J| \geq |I| - |T| = n$. Für alle $i \in J$ ist $a_i \in F'(i) \setminus T = F(i)$. Damit ist $(a_i)_{i \in J}$ eine injektive Auswahlfunktion von $F|\,J$.

Lösungen 4. Hausübung

Aufgabe 1

Die Schlachtung sei möglich.
H_i sei die Menge der Rinder, die Züchter i schlachtet. Dann gilt:
$H_i \subseteq R_i$, $|H_i| \geq k$ und $H_1, \ldots, H_n$ sind paarweise disjunkt. Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt also:

$$|\bigcup_{i \in I} R_i| \geq |\bigcup_{i \in I} H_i| \geq k|I| \, .$$

Es gelte die angegebene Bedingung.
Es sei $J := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, k\}$. Für $(i, j) \in J$ sei $S_{ij} := R_i$.
Behauptung: $(S_{ij})_{(i,j) \in J}$ erfüllt die Hall–Bedingung.
Sei $J' \subseteq J$. Wir definieren $I := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \exists j \in \{1, \ldots, k\} \; (i, j) \in J'\}$. Es folgt

$$\bigcup_{(i,j) \in J'} S_{ij} = \bigcup_{i \in I} R_i \quad \text{und} \quad k|I| \geq |J'| \, ,$$

denn zu einem $i \in I$ gehören maximal k Elemente aus J'. Also gilt

$$|\bigcup_{(i,j) \in J'} S_{ij}| = |\bigcup_{i \in I} R_i| \geq k|I| \geq |J'| \, .$$

Nach dem Satz von Hall besitzt $(S_{ij})_{(i,j) \in J}$ eine injektive Auswahlfunktion (ein Repräsentantensystem $(a_{ij})_{(i,j) \in J}$). Eine Schlachtung kann also dadurch realisiert werden, daß Züchter i die Rinder $a_{i1}, \ldots, a_{ik}$ schlachtet $(i = 1, \ldots, n)$.

Aufgabe 2

Zunächst macht man sich klar:
Ist E ein gemeinsames Repräsentantensystem für die beiden Partitionen, so muß jeder der Durchschnitte $E \cap A_i$ und $E \cap B_j$ einelementig sein, wegen $|E| = m$ und da die A_i und B_j paarweise disjunkt sind. Daraus folgt, daß es genau dann ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Partitionen gibt, wenn eine geeignete Umnumerierung der B_j existiert, so daß $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.
Nun zum Beweis für $\Longrightarrow$:
Annahme es gibt o.B.d.A. $I = \{1, \ldots, k\}$ so daß $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ o.B.d.A. $B_1, B_2, \ldots, B_l$ mit $l > k$ enthält. Dann muß $A_{k+1} \cap B_{k+1} = \emptyset$ gelten, da Partitionen vorliegen und schon $B_{k+1} \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_k$ gilt, ein Widerspruch zu obiger Bemerkung.
Beweis von $\Longleftarrow$:
Es sei $S = \{A_1, \ldots, A_m\}$ und $S_i := \{A_j \mid A_j \cap B_i \neq \emptyset\}$. Wir zeigen, daß $M(S) := (S_1, \ldots, S_m)$ ein Repräsentantensystem besitzt. Angenommen, $M(S)$ erfüllt nicht die Hall-Bedingung. Dann gibt es eine $k-$elementige Indexmenge I (o.B.d.A. $I = \{1, \ldots, k\}$ mit $|S_1 \cup \ldots \cup S_k| < k$. Sei $S_1 \cup \ldots \cup S_k = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}\}$ mit $l < k$. Dann enthält die Menge $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_l}$ die Mengen $B_1, \ldots, B_k$, denn in $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ liegen **alle** A_j, die mit einer der Mengen $B_1, \ldots, B_k$ einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Also besitzt $M(S)$ ein Repräsentantensystem. Numerieren wir die Mengen A_i so um, daß dieses Repräsentantensystem $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ ist, so gilt $A_i \in S_i$ für alle i und nach Definition der S_i dann $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ für alle i. Nach dem Vorspann besitzen die Partitionen damit ein gemeinsames Repräsentantensystem.

Aufgabe 3

Eine Folgerung aus Aufgabe 2 ist der folgende **Satz**:

Sind $T = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ zwei Partitionen von T und gilt $|A_i| = |B_j| = r$ für alle i und für alle j, so besitzen die Partitionen ein gemeinsames Repräsentantensystem.
Der Beweis folgt sofort, da sich aus der Gleichmächtigkeit aller Partitionsmengen die hinreichende Bedingung für die Existenz eines gemeinsamen Repräsentantensystems aus Aufgabe 2 ergibt.
Da die Rechts- und auch die Linksnebenklassen von H in G alle gleichmächtig sind und eine Partition der Gruppe G bilden, folgt die Aussage von Aufgabe 3 jetzt aus diesem Satz.

Aufgabe 4
Aus (b) folgt (a):
Es sei $K \subset\subset I$ mit $|H(K)| = |K|$; ferner $B \subseteq H(K)$. Beh.: B ist begehrt.
Sei also f eine Hochzeit von H. Da $|H(K)| = |K|$ ist $f[K] = H(K)$, also folgt
$B \subseteq H(K) = f[K] \subseteq \mathrm{Nb}\, f$, d.h. B ist begehrt.
Aus (a) folgt (b):
Sei $b \in B$. Dann besitzt $H' := (H(i) \setminus \{b\} \mid i \in I)$ keine Hochzeit. Also gibt es nach dem Satz von Hall ein endliches $K_b \subset\subset I$ mit $|H(K_b) \setminus \{b\}| < |K_b|$.
Da H eine Hochzeit besitzt, ist $|H(K_b)| \geq |K_b|$, also ist $|H(K_b)| = |K_b|$ und $b \in H(K_b)$. Sei $K := \bigcup_{b \in B} K_b$. Es ist $K \subset\subset I$ und $B \subseteq \bigcup_{b \in B} H(K_b) = H(K)$. Ferner besitzt $H| K$ eine Hochzeit f, da H Hall-Familie ist. Es ist

$$f[K] = \bigcup_{b \in B} f[K_b] = \bigcup_{b \in B} H(K_b) = H(K) \, .$$

Da f Hochzeit ist, folgt weiter $|K| = |f[K]| = |H(K)|$.

Lösungen 5. Hausübung

Aufgabe 1

Der Beweis kann wie in der Stundenübung geführt werden. Dazu zeigt man, daß

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}_p[x]/(f\cdot g) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[x]/(f) \times \mathbb{Z}_p[x]/(g) \\ r/(f\cdot g) & \mapsto & (r/(f), r/(g)) \end{cases}$$

ein Isomorphismus ist. Lediglich das Abzählargument bei der Surjektivität bedarf einer kleinen Veränderung:
$|\mathbb{Z}_p[x]/(f\cdot g)| = p^{\mathrm{grad}\,(f\cdot g)} = p^{\mathrm{grad}\,f+\mathrm{grad}\,g} = p^{\mathrm{grad}\,f}\cdot p^{\mathrm{grad}\,g} = |\mathbb{Z}_p[x]/(f)|\cdot|\mathbb{Z}_p[x]/(g)|$.

Aufgabe 2

a)

Die Polynome x^2+x+1 , x^3+x+1 , x^4+x+1 sind irreduzibel in $\mathbb{Z}_2$. Bei den beiden ersten folgt dies, da sie keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ besitzen, beim letzten, weil es keine Nullstelle besitzt und auch keine Zerlegung in irreduzble Polynome vom Grade 2 (dies ist in $\mathbb{Z}_2[x]$ nur x^2+x+1) existiert. Also sind R_2, R_3 und R_4 Körper. Für x^5+x+1 ist $x^5+x+1 = (x^2+x+1)(x^3+x^2+1)$ eine Zerlegung in irreduzible Polynome. Daher ist R_5 kein Körper.

b)

Man kann hier R_3 betrachten und die Verknüpfungstafeln aufstellen. Hier wird $\mathbb{Z}_2[t]/(t^3+t^2+1)$ betrachtet, denn auch t^3+t^2+1 ist irreduzibel.
Führt man für die Restklassen die Bezeichnungen $0 =: 1$, $1 =: 2$, $t =: 3$, $1+t =: 4$, $t^2 =: 5$, $1+t^2 =: 6$, $t+t^2 =: 7$, $1+t+t^2 =: 8$ ein, so erhält man folgende Additions- und Multiplikationstabelle – bei denen die Zeile und Spalte für das neutrale Element jeweils weggelassen wurde:

+	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

·	3	4	5	6	7	8
3	5	7	6	8	2	4
4	7	6	2	3	8	5
5	6	2	8	4	3	7
6	8	3	4	7	5	2
7	2	8	3	5	4	6
8	4	5	7	2	6	3

Aufgabe 3

a)

Es gilt: $(a_1,b_1),\dots,(a_k,b_k)$ sind genau dann paarweise orthogonal in $R_1\times R_2$, wenn $a_1,\dots,a_k$ und $b_1,\dots,b_k$ paarweise orthogonal in R_1 bzw. R_2 sind.
Beweis:

$$\begin{array}{ll} & (a_1,b_1),\dots,(a_k,b_k) \text{ paarweise orthogonal in } R_1\times R_2 \\ \Longleftrightarrow & \forall\, i,j\in\{1,\dots,k\}\ i\neq j \text{ gilt: } (a_i,b_i) \text{ ist orthogonal zu } (a_j,b_j) \\ \Longleftrightarrow & (a_i,b_i) \text{ und } (a_j,b_j) \text{ sind Einheiten in } R_1\times R_2 \\ & \text{und } (a_i,b_i)-(a_j,b_j) = (a_i-a_j, b_i-b_j) \text{ ist Einheit in } R_1\times R_2 \\ \Longleftrightarrow & a_i, a_j \text{ und } a_i-a_j \text{ sind Einheiten in } R_1 \text{ und} \\ & b_i, b_j \text{ und } b_i-b_j \text{ sind Einheiten in } R_2 \\ \Longleftrightarrow & a_1,\dots,a_k \text{ und } b_1,\dots,b_k \text{ sind paarweise orthogonal in } R_1 \text{ bzw. } R_2. \end{array}$$

Damit folgt sofort die Behauptung $N(R_1\times R_2) = \min\{N(R_1), N(R_2)\}$.

b)

Es ist $N(R_2) = 3$, $N(R_3) = 7$ und $N(R_4) = 15$, da R_2, R_3, R_4 nach 2 a) Körper sind.
Es ist $x^5 + x + 1 = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$ eine Zerlegung von $x^5 + x + 1$ in irreduzible Faktoren (siehe 2 b)). Damit gilt nach 1):

$$R_5 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^5 + x + 1) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1) \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1) .$$

Nach a) folgt nun $N(R_5) = N(R_2) = 3$.

Aufgabe 4

Es sei $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von n. Nach Stundenübung (und Induktion) folgt

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{r_k}}$$

und nach Aufgabe 2 a) (ebenfalls Induktion) ergibt sich

$$N(\mathbb{Z}_n) = \min \{N(\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}), \ldots , N(\mathbb{Z}_{p_k^{r_k}})\} .$$

Es reicht also zu zeigen:
Ist p Primzahl und $s \in \mathbb{N}$, so gilt $N(\mathbb{Z}_{p^s}) = p - 1$.
Zunächst folgt leicht, daß $S = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots , \overline{p-1}\}$ eine orthogonale Menge in $\mathbb{Z}_{p^s}$ ist, denn für $\overline{a_i}, \overline{a_j} \in S$ mit $\overline{a_i} \neq \overline{a_i}$ gilt $0 < |a_i - a_j| < p - 1$ und da mit x auch $-x$ Einheit in einem Ring ist, ist $\overline{a_i} - \overline{a_j} = \overline{a_i - a_j}$ Einheit in $\mathbb{Z}_{p^s}$. Also gilt $N(\mathbb{Z}_{p^s}) \geq p - 1$.
Für $N(\mathbb{Z}_{p^s}) \leq p - 1$ zeigen wir zunächst:
Ist $\varphi : R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus, so ist $N(R) \leq |R'| - 1$.
Es gilt
(i) $r \in E(R) \implies \varphi(r) \neq 0'$
(ii) $r - s \in E(R) \implies \varphi(r) \neq \varphi(s)$,
wie sich aus der Homomorphie von φ und $\varphi(1) = 1'$ sofort ergibt. Ist also $S \subseteq E(R)$ orthogonal, dann ist nach (i) $\varphi[S] \subseteq R' \setminus \{0'\}$. Da ferner nach (ii) φ eingeschränkt auf S injektiv ist, folgt $N(R) \leq |R'| - 1$.
Ist nun p eine Primzahl mit $p|n$, so ist nach Stundenübung

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p \\ r/(n) & \mapsto & r/(p) \end{cases}$$

ein Homomorphismus, also ist nach Obigem $N(\mathbb{Z}_n) \leq |\mathbb{Z}_p| - 1 = p - 1$.
Damit folgt $N(\mathbb{Z}_{p^s}) \leq p - 1$.

Lösungen 6. Hausübung

Aufgabe 1

a) Durch Probieren findet man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \perp \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \perp \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Nach Stundenübung reicht es, zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =: (u_{ij})$$

ein orthogonales lateinisches Quadrat der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} =: (v_{ij})$$

zu suchen. Behauptung: Ein solches Quadrat gibt es nicht!
Gäbe es ein solches Quadrat, so müßte für die a_i gelten:

$$(*) \qquad a_1 \neq 1,2 \ \wedge \ a_2 \neq 2,4 \ \wedge \ a_3 \neq 3,1 \ \wedge \ a_4 \neq 4,3 \, .$$

1. Fall: $a_1 = 3$
Aus $(*)$ folgt dann $a_2 = 1$, danach aus der Orthogonalität $c_1 = 2$ und damit weiter $b_1 = 4, b_2 = 3, c_2 = 4$. Damit ist $(u_{31}, v_{31}) = (u_{42}, v_{42})$, ein Widerspruch dazu, daß (u_{ij}) und (v_{ij}) orthogonal sein sollten.
2. Fall: $a_1 = 4$
Aus $(*)$ folgt dann $a_3 = 2$, weiter $a_4 = 1$ und $a_2 = 3$. Wegen der Orthogonalität folgt $b_1 = 2$ und dann weiter $c_1 = 3$. Damit gilt $(u_{22}, v_{22}) = (u_{41}, v_{41})$, wiederum ein Widerspruch.

Aufgabe 2

Es sei A zu Z und zu S orthogonal. Annahme $a_{ij} = a_{ik}$ mit $j \neq k$. Da A orthogonal zu Z ist, muß $(a_{ij}, z_{ij}) \neq (a_{ik}, z_{ik})$ gelten. Wegen $z_{ij} = z_{ik}$ folgt daraus $a_{ij} \neq a_{ik}$, ein Widerspruch.
Also stehen in jeder Zeile von A lauter verschiedene Elemente. Entsprechend zeigt man unter Benutzung, daß A orthogonal zu S ist, daß in jeder Spalte von A lauter verschiedene Elemente stehen. Also ist A ein lateinisches Quadrat.

Sei A ein lateinisches Quadrat. Wir zeigen, daß A orthogonal zu Z ist.
Es sei $(a_{ij}, z_{ij}) = (a_{kl}, z_{kl})$ mit $(i,j) \neq (k,l)$. Da $z_{ij} = z_{kl}$ ist, folgt $i = k$. Damit ist $a_{ij} = a_{il}$. Da A ein lateinisches Quadrat ist, muß dann $j = l$ gelten, insgesamt also $(i,j) = (k,l)$, ein Widerspruch.
Wiederum entsprechend folgt, daß A orthogonal zu S ist.

Aufgabe 3

Es sei $K = \{a_0, a_1, \dots , a_{n-1}\}$ ein Körper mit n Elementen, wobei a_0 das neutrale Element der

Addition sei. Mittels

$$A_k = (a_{ij}^k) \text{ mit } a_{ij}^k = a_k \cdot a_i + a_j \text{ für } k = 1, \ldots, n-1\ ,\ i, j = 0, 1, \ldots, n-1$$

erhält man eine vollständige Menge orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung n.
Für $n = 5$ nehme man den Restklassenkörper $\mathbb{Z}_5$ und benenne die Elemente $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ um in $1, 2, 3, 4, 5$. Es folgt:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf entsprechende Weise erhält man unter Benutzung der in den Lösungshinweisen zu Übung 5 angegebenen Verknüpfungstafeln für einen Körper mit 8 Elementen die folgende vollständige Menge von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 8:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) Wegen $a_{ij}, b_{ij} \in \{1, \ldots, n\}$ folgt

$$1 = n(1-1) + 1 \leq m_{ij} \leq n(n-1) + n = n^2 \ .$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(n(a_{ij}-1)+b_{ij}) = n\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n} i \ , \ \text{ da } A, B \text{ lat. Quadrate} \\ &= (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i \ + n = (n+1)\frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n}{2}(n^2+1)\end{aligned}$$

Also sind alle Spaltensummen von M gleich (und zwar gleich $\frac{n}{2}(n^2+1)$).

Entsprechend folgt $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \frac{n}{2}(n^2+1)$.

c) Zu zeigen ist noch: $(i,j) \neq (k,l) \Longrightarrow m_{ij} \neq m_{kl}$.
Es sei $m_{ij} = m_{kl}$, also $n(a_{ij}-1) + b_{ij} = n(a_{kl}-1) + b_{kl}$ und o.B.d.A. sei $b_{ij} \leq b_{kl}$. Dann folgt

$$n(a_{ij} - a_{kl}) = b_{kl} - b_{ij} \equiv 0 \text{ modulo } n \ .$$

Wegen $0 \leq b_{kl} - b_{ij} < n$ folgt $b_{kl} = b_{ij}$ und damit $a_{ij} = a_{kl}$. Es ist also $(a_{ij}, b_{ij}) = (a_{kl}, b_{kl})$, und da A und B orthogonal sind, folgt $(i,j) = (k,l)$.

Lösungen 7. Hausübung

Aufgabe 1
Wir zeigen: Es gibt vier Geraden, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen.
Zunächst gibt es 4 Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Betrachte nun die folgenden Geraden: g_1 durch p_1, p_2, g_2 durch p_1, p_3, g_3 durch p_3, p_4 und g_4 durch p_4, p_2. Da durch je zwei Punkte genau eine Gerade geht, sind g_1, g_2, g_3, g_4 paarweise verschieden, denn keine drei der Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 liegen auf einer Geraden.
Annahme: g_1, g_2, g_3 haben einen gemeinsamen Punkt p.
1. Fall: $p \notin \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
Betrachte dann die Gerade g durch p und p_1. Es folgt $g = g_1$, da p und p_1 auch auf g_1 liegen, und $g = g_2$, da beide Punkte ebenfalls auf g_2 liegen. Also $g_1 = g_2$, ein Widerspruch.
2. Fall: $p \in \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
Ist $p = p_1$, so liegen p_1, p_3, p_4 auf g_3, ein Widerspruch.
Ist $p = p_2$, so liegen p_1, p_2, p_3 auf g_2, ein Widerspruch.
Ist $p = p_3$, so liegen p_1, p_2, p_3 auf g_1, ein Widerspruch.
Ist $p = p_4$, so liegen p_1, p_2, p_4 auf g_1, ein Widerspruch.

Aufgabe 2
Wir benutzen die Bezeichnungen $K^3 = \{\vec{x} = (x, y, z) | x, y, z \in K\}$, $[\vec{x}]$ bezeichne den von $\vec{x} \neq \vec{0}$ erzeugten Untervektorraum vom K^3.
(P1) Seien p, q zwei verschiedene Punkte aus P, und $p = [\vec{x_1}], q = [\vec{x_2}]$. Dann sind $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ linear unabhängig, und damit ist $\dim [\vec{x_1}, \vec{x_2}] = 2$. Damit gibt es eine Gerade $g \in G$ mit $p, q \in g$. g ist eindeutig, da es keinen weiteren zweidimensionalen Untervektorraum vom K^3 gibt, der sowohl $\vec{x_1}$ als auch $\vec{x_2}$ enthält.
(P2) g_1, g_2 seien verschiedene Geraden aus G. Dann sind die zugehörigen Untervektorräume W_1, W_2 verschieden. Also ist $[W_1, W_2] = K^3$ und die Dimensionsformel liefert $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. Damit ist $W_1 \cap W_2$ ein Punkt p, für den natürlich gilt: $p \in g_1$ und $p \in g_2$. p ist eindeutig, da sonst $\dim W_1 \cap W_2 = 2$ folgen würde.
(P3) Von den vier Punkten $[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)], [(0, 0, 1)], [(1, 1, 1)]$ liegen keine drei auf einer Geraden, da je drei dieser Untervektorräume den K^3 erzeugen.
Ist $|K| = n$, so besitzt der K^3 genau n^3 Elemente, also $n^3 - 1$ Elemente, die vom Nullvektor verschieden sind. Jedes dieser Elemente erzeugt einen Untervektorraum der Dimension 1, der aus $n - 1$ dieser Elemente und dem Nullvektor besteht. Also gibt es $\dfrac{n^3 - 1}{n - 1} = n^2 + n + 1$ Untervektorräume der Dimension 1 im K^3. Da also $|P| = n^2 + n + 1$ gilt und (P, G) schon als projektive Ebene nachgewiesen wurde, besitzt sie die Ordnung n.

Aufgabe 3
Wir definieren den Graphen (P, K) durch

$$K = \{\{p, r\} \mid r \in P \setminus \{p\}\} \cup \{\{q, f(q)\} \mid q \in P \setminus \{p\}\} .$$

Dann ist nach Definition von K natürlich $S_p = P \setminus \{p\}$. Nachbarn von $q \neq p$ sind stets p und $f(q)$, also $\{p, f(q)\} \subseteq S_q$.
Annahme, es gibt ein $r \in S_q$ mit $r \neq p$ und $r \neq f(q)$. Da K (außer Kanten der Form $\{p, l\}$) nur Kanten der Form $\{l, f(l)\}$ enthält, muß dann $f(r) = q$ gelten. Damit folgt aber $r = f(f(r)) = f(q)$, ein Widerspruch.

Aufgabe 4
Zu (P1):
Seien $p, q \in P, p \neq q$. Annahme, es gibt kein $g \in G$ mit $p, q \in g$. Dann ist $\overline{p} \cap \overline{q} = \emptyset$.
Für alle $g \in \overline{p}$ und $h \in \overline{q}$ existiert wegen $|g \cap h| = 1$ ein eindeutiges $c_{gh} \in g \cap h$. Es ist stets $c_{gh} \notin \{p, q\}$. Wir zeigen nun, daß $(g, h) \mapsto c_{gh}$ eine injektive Abbildung von $\overline{p} \times \overline{q}$ nach $P \setminus \{p, q\}$ ist.
Seien dazu $g, g' \in \overline{p}, h, h' \in \overline{q}$ mit $c_{gh} = c_{g'h'}$. Dann ist $p \in g \cap g'$ und $c_{gh} \in g \cap g'$, wegen $|g \cap g'| = 1$ und $p \neq c_{gh}$ also $g = g'$. Entsprechend folgt $h = h'$.
Aus der Injektivität folgt nun:

$$|\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \leq |P| - 2 \text{ , also } |P| \geq 2 + (n+1)^2 = n^2 + 2n + 3 > n^2 + n + 1 \text{ ,}$$

ein Widerspruch. Es gibt also ein $g \in G$ mit $p, q \in g$. g ist eindeutig, denn gäbe es ein $h \in G$ mit $p, q \in h$ und $g \neq h$, so wäre $|g \cap h| \geq 2$, im Widerspruch zur Voraussetzung $|g \cap h| = 1$.

(P2) ist klar.

Zu (P3):
Es ist $|P| = n^2 + n + 1 \geq 7$, da $n \geq 2$.
Wähle $p_1, p_2 \in P$ mit $p_1 \neq p_2$. Nach (P1) gibt es ein $h \in G$ mit $p_1, p_2 \in h$. Wegen $|\overline{p}| = n+1 \geq 3$ für alle $p \in P$, gibt es $h_1, h_2 \in \overline{p_1} \setminus \{h\}$ mit $h_1 \neq h_2$ und $h_3, h_4 \in \overline{p_2} \setminus \{h\}$ mit $h_3 \neq h_4$.
Beh.: h_1, h_2, h_3, h_4 sind paarweise verschieden.
Wäre $h_1 = h_3$, so wäre $p_1, p_2 \in h_1$, also $|h \cap h_1| \geq 2$, ein Widerspruch. Entsprechend schließt man weiter.
Sei nun $\{p_3\} := h_1 \cap h_3$ und $\{p_4\} := h_2 \cap h_4$.
Beh.: p_1, p_2, p_3, p_4 sind paarweise verschieden, und keine drei von ihnen liegen auf einer Geraden.
Wäre $p_1 = p_3$, so wäre $p_1, p_2 \in h \cap h_3$, ein Widerspruch.
Wäre $p_1 = p_4$, so wäre $p_1, p_2 \in h \cap h_4$, ein Widerspruch.
Wäre $p_3 = p_4$, so wäre $p_1, p_3 \in h_1 \cap h_2$, ein Widerspruch.
Wäre $p_2 = p_3$, so wäre $p_1, p_2 \in h \cap h_3$, ein Widerspruch.
Wäre $p_2 = p_4$, so wäre $p_1, p_2 \in h \cap h_2$, ein Widerspruch.
Die Punkte sind also parweise verschieden.
Annahme, es gibt ein $g \in G$ mit $|g \cap \{p_1, \ldots, p_4\}| \geq 3$.
Aus Symmetriegründen sind nur folgende Fälle zu betrachten:

1) $p_1, p_2, p_3 \in g$
$\Longrightarrow g = h$ und $g = h_1$,
also $h = h_1$, Widerspruch.

2) $p_1, p_3, p_4 \in g$
$\Longrightarrow g = h_1$ und $g = h_2$,
also $h_1 = h_2$, Widerspruch.

Lösungen 8. Hausübung

Aufgabe 1

Führt man k neue Personen ein, die mit allen befreundet sind, so ist für $k = n$ eine Sitzordnung möglich, da man ursprüngliche und neue Personen nur abwechselnd zu setzen braucht. Also existiert das Minimum k_0 aller k derart, daß nach Einführung von k neuen Personen eine gesuchte Sitzordnung möglich ist. Nach Obigem gilt $0 \leq k_0 \leq n$.
Annahme: $k_0 > 0$.
Dann sitzt irgendwo am Tisch eine neue Person P. Wir schreiben die Sitzordnung linear auf in der Form

$$(*) \qquad A\ P\ B\ \ldots\ A\,.$$

A' bezeichne einen Freund von A, B' einen Freund von B. B kann nicht A' sein, da sonst P überflüssig wäre.
Annahme: In $\ldots$ erscheint $A'B'$.
Bilde dann die Sitzordnung

$$A\ (\ B\ \ldots\ A'\ )\ B'\ \ldots\ A\,,$$

und daraus durch Umkehrung der Reihenfolge in der Klammer

$$A\ A'\ \ldots\ B\ B'\ \ldots\ A\,.$$

Dies ist dann eine zulässige Sitzordnung mit weniger als k_0 neuen Personen, im Widerspruch zur Definition von k_0. Also kann in $(*)$ nach B niemals $A'\,B'$ vorkommen, d.h. aber, es kommt in $(*)$ niemals $A'\,B'$ vor. Nach einem Freund von A kommt in $(*)$ also stets kein Freund von B. Damit folgt:

$$\begin{array}{llll} \text{Anzahl der Nichtfreunde von } B & \geq \ \text{Anzahl der Freunde von } A \ -1 & \geq & \frac{n}{2} + k_0 - 1 \\ \text{Anzahl der Freunde von } B & & \geq & \frac{n}{2} + k_0 \end{array}$$

und durch Summation daraus $n + k_0 - 1 \geq n + 2k_0 - 1$, ein Widerspruch, da $k_0 > 0$ vorausgesetzt wurde.
Insgesamt folgt also $k_0 = 0$, es ist also eine Sitzordnung am runden Tisch möglich, bei der nur Freunde nebeneinander sitzen.

Aufgabe 2

Es ist $f_s^{-1} = \dfrac{1}{1 - x^s}$. Der Formel für die geometrische Reihe oder der Multiplikation von formalen Potenzreihen entnimmt man

$$\frac{1}{1 - x^s} = 1 + x^s + x^{2s} + x^{3s} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{ks}\,.$$

Aufgabe 3

Gesucht ist $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 - x + x^2}$. Wir nehmen die folgende Umformung vor:

$$\frac{1}{1 - x + x^2} = \frac{1 + x}{(1 + x)(1 - x + x^2)} = \frac{1 + x}{1 + x^3} = \frac{1}{1 + x^3} + \frac{x}{1 + x^3}\,.$$

Aus Aufgabe 2 folgt

$$\frac{1}{1 + x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}\,.$$

Damit folgt

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k+1} \ ,$$

also

$$f^{-1}(x) = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \ldots$$

Aufgabe 4

Gilt $g^s = f$, so folgt nach der Definition der Multiplikation von formalen Potenzreihen:

$$a_k = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_s=k} b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_s} \ .$$

Insbesondere gilt wegen $a_0 = b_0 = 1 : \quad sb_1 = a_1$. Für $k > 1$ erhält man

$$sb_k + p_{s,k}(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) = a_k \ .$$

wobei $p_{s,k}$ ein Polynom in den Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ ist. Damit lassen sich die b_i sukzessive eindeutig bestimmen, d.h. $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ ist eindeutig bestimmt.

Speziell für $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ und $s = 2$ folgt:

$$\begin{array}{lcl} 2b_1 & = & 1 \\ 2b_2 + b_1^2 & = & 1 \\ 2b_3 + 2b_1 b_2 & = & 1 \\ 2b_4 + 2b_1 b_3 + b_2^2 & = & 1 \\ 2b_5 + 2b_1 b_4 + 2b_2 b_3 & = & 1 \\ & \vdots & \end{array}$$

Daraus folgt

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots$$

Mit analytischen Mitteln kann man auch wie folgt schließen:
Aus

$$g^2 = f = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

folgt $g(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ und die binomische Reihe liefert

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n \ .$$

Lösungen 9. Hausübung

Aufgabe 1
Die gesuchte Anzahl sei u_n. Die möglichen Folgen zerfallen in zwei disjunkte Klassen.

1. Die Folgen, die an der letzten Stelle eine 1 oder 2 haben. Davon gibt es $2u_{n-1}$ Stück.
2. Die Folgen, die an der letzten Stelle eine 0 haben. Dieser besitzen im vorderen Teil eine gerade gerade Anzahl von Nullen. Davon gibt es $3^{n-1} - u_{n-1}$ Stück

Daraus ergibt sich die Rekursion $u_n = 2u_{n-1}+3^{n-1}-u_{n-1} = u_{n-1}+3^{n-1}$. Die Anfangsbedingung $u_0 = 0$ liefert den richtigen Wert $u_1 = 1$.
Wir betrachten nun die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty}(u_{n-1} + 3^{n-1})x^n \\ &= x + x \cdot u(x) + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n = x \cdot u(x) + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n \ , \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} \quad \text{(PBZ)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \end{aligned}$$

also $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2
a) Man zeichne auf dem Kreisrand einen der $2n$ Punkte aus – nenne ihn K – und bestimme von K aus einen Umlaufsinn. Dann durchlaufe man den Kreis, beginnend bei K, und notiere bei jeder Erstberührung einer Sehne den Buchstaben A, bei der Zweitberührung den Buchstaben E. Es entsteht eine Folge aus n Symbolen A und n Symbolen B, bei der an jeder Stelle der Folge die Anzahl der bis dahin vorkommenden A größer oder gleich der Anzahl der B ist. Dieser Prozeß ist umkehrbar, wenn man vereinbart, daß beim Vorkommen eines E dies der Endpunkt derjenigen Sehne ist, die beim letzten noch nicht verbrauchten A beginnt. So entstehen nur Sehnen, die sich im Kreis nicht schneiden.
Wegen der angegebenen Bijektion ist die gesuchte Anzahl also gleich der Anzahl der so definierten Folgen der Länge n. Nach Stundenübung ist die gesuchte Anzahl gerade g_{n+1}.

b) Wir betrachten nur die Polygone, die unterhalb der Hauptdiagonalen verlaufen und verdoppeln anschließend die Anzahl. Diese Polygone müssen durch die Punkte $(1,0)$ und $(n, n-1)$ verlaufen. Beide Punkte müssen durch genau $n-1$ waagerechte Strecken der Länge 1 und genau $n-1$ senkrechte Strecken der Länge 1 verbunden werden. Schreibt man W für waagerecht und S für senkrecht, so entsprechen die möglichen Polygone eineindeutig Folgen aus $n-1$ Symbolen W und $n-1$ Symbolen S, die der folgenden zusätzlichen Bedingung genügen müssen: Die Anzahl der Symbole W muß an jeder Stelle der Folge größer oder gleich der Anzahl der Symbole S bis zu dieser Stelle der Folge sein. (Sonst würde die Diagonale getroffen!) Daher kann man wieder die Aussage der Stundenübung anwenden, wonach die Anzahl dieser Folgen gleich g_n ist.

Aufgabe 3
Die gesuchte Anzahl sei a_n. Will man die größte, unten liegende Scheibe auf den mittleren Stab legen, müssen alle darüber liegenden Scheiben in richtiger Reihenfolge auf dem rechten Stab liegen. Dazu sind a_{n-1} Umlegungen nötig. Dann legt man die große Scheibe auf den mittleren Ring und benötigt noch einmal a_{n-1} Umlegungen, um danach die restlichen $n-1$ Scheiben, die ja in geordneter Form jetzt rechts liegen, auf den mittleren Stab über die größte Scheibe zu legen. Also folgt die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 1$ für $n \geq 2$. Mit $a_0 = 0$ ergibt sich hieraus $a_1 = 1$, der richtige Wert für a_1. Wir betrachten wieder die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad = x + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n \\ &= x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \\ &= x + 2xa(x) + \frac{1}{1-x} - 1 - x \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a(x) = \frac{1}{1-2x}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}\ .$$

Das ergibt

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ ,$$

also $a_n = 2^n - 1$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 4
Der $\mathbb{R}^3$ sei durch $n-1$ Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$, die den angegebenen Bedingungen genügen, in u_{n-1} Gebiete aufgeteilt. Die n-te Ebene E_n wird durch die Geraden $g_i := E_i \cap E_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ in a_{n-1} Flächenstücke zerlegt. Jedes dieser ebenen Gebiete zerlegt das räumliche Gebiet, in dem es liegt, in zwei Bereiche. Daher folgt:

$$u_n = u_{n-1} + a_{n-1} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots \qquad \text{mit } u_0 = 1\ .$$

Es bleibt a_{n-1} zu bestimmen.
Aus (ii) folgt $1 = |E_n \cap E_i \cap E_j| = |E_n \cap E_i \cap E_n \cap E_j| = |g_i \cap g_j|$ für $i, j = 1, \ldots, n-1,\ i \neq j$. Also liegen die $n-1$ Geraden in E_n so, daß keine zwei parallel sind. Hätten drei der Geraden einen Punkt gemeinsam, so wäre $|E_n \cap E_i \cap E_j \cap E_k| = 1$ für $1 \leq i < j < k \leq n-1$, im Widerspruch zu (iii). Also ist a_{n-1} gerade die Anzahl, die in der Vorlesung bestimmt wurde, d.h. es ist

$$a_{n-1} = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \qquad \text{mit } a_0 = 1\ .$$

Damit erhält man für u_n die Rekursion $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ für $n \geq 1$ und $u_0 = 1$. Mittels der erzeugenden Funktion $u(x)$ wird jetzt u_n bestimmt.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots \\ &= u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1\right)x^n \\ &= u_0 + x\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x \cdot u(x) + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' + \frac{1}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

Es folgt $u(x) = (\frac{1}{1-x})^2 + \frac{x^2}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$.

Nun ist nach Vorlesung $(\frac{1}{1-x})^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ und $(\frac{1}{1-x})^4 = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$. Damit folgt $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ und

$$u_n = n + 1 + \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) \quad \text{für } n \geq 2\ .$$

Die letzte angegebene Formel gilt damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungen 10. Hausübung

Aufgabe 1
Die erzeugende Funktion für die Anzahl a_r der Möglichkeiten, r Münzen aus 8 Typen derart auszuwählen, daß von jedem Typ mindestens 2 und höchstens 6 Münzen vorhanden sind, ist nach Stundenübung $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^8$. Der Koeffizient von x^{25} ist gesucht. Wegen

$$(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^8 = (x^2(1+x+x^2+x^3+x^4))^8 = x^{16}(1+x+x^2+x^3+x^4)^8$$

ist der Koeffizient von x^9 in $(1+x+x^2+x^3+x^4)^8$ gesucht.
Aus $1+x+x^2+x^3+x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$ folgt

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+x^4)^8 &= (1-x^5)^8\cdot(1-x)^{-8}\\ &= (1-\binom{8}{1}x^5+\binom{8}{2}x^{10}+\dots)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{8+i-1}{i}x^i\right)\end{aligned}$$

nach Vorlesung.

Der Koeffizient von x^9 ergibt sich daraus als

$$1\cdot\binom{16}{9}-\binom{8}{1}\cdot\binom{11}{4} = 11440-2640 = 8800\ .$$

Aufgabe 2
Gesucht ist die Anzahl der (a_1,a_2,a_3) mit $a_1\in\{1,2,\dots,9\}$, $a_2,a_3\in\{0,1,\dots,9\}$ und $a_1+a_2+a_3=n$.
Wählt man $F_1=\{1,2,\dots,9\}$ sowie $F_2=F_3=\{0,1,\dots,9\}$, und ferner $g_1=g_2=g_3\equiv 1$ so erhält man für $f(x):=\sum f_ix^i$ mit $f_i=$ Anzahl der 3−stelligen Dezimalzahlen mit der Quersumme i nach Stundenübung

$$f(x) = (x+x^2+\dots+x^9)(1+x+x^2+\dots+x^9)^2\ .$$

Addition von $1-1$ in der ersten Klammer führt auf

$$\begin{aligned}f(x) &= (-1+1+x+x^2+\dots+x^9)(1+x+\dots+x^9)^2 = (\frac{1-x^{10}}{1-x})^3-(\frac{1-x^{10}}{1-x})^2\\ &= \sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}x^{10j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k-\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}x^{10j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{1}x^k\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{10j+k=n}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{k+2}{2}-\sum_{10j+k=n}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{k+1}{1}\right)x^n\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$f_n = \sum_{10j+k=n}(-1)^j(\binom{3}{j}\binom{k+2}{2}-\binom{2}{j}(k+1))\ ,$$

also speziell

$$f_{11} = \binom{13}{2}-12-(\binom{3}{1}\binom{3}{2}-\binom{2}{1}\cdot 2) = 61\ .$$

Aufgabe 3
Wählt man $D_1 = \{b_{50}\}$, $D_2 = \{b_{100}\}$, $D_3 = \{b_{200}\}$ sowie $w(b_{50}) = 1$, $w(b_{100}) = 2$, $w(b_{200}) = 4$ und setzt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, wobei
$f_n =$ Anzahl der möglichen Frankaturen mit dem Wert $50n$ Pf, so ist f_6 gesucht.
Nach Vorlesung und Stundenübung gilt

$$f(x) = (\frac{1}{1-x})^4 \cdot (\frac{1}{1-x^2})^3 \cdot (\frac{1}{1-x^4})^2 .$$

Mit

$$(\frac{1}{1-x})^s = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+i-1}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+s-1}{s-1} x^i$$

folgt nun:

$$\begin{aligned}
A := (\frac{1}{1-x})^4 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^i = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6 + \dots \\
B := (\frac{1}{1-x^2})^3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+2}{2} x^{2i} = 1 + 3x^2 + 6x^4 + 10x^6 + \dots \\
C := (\frac{1}{1-x^4})^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{1} x^{4i} = 1 + 2x^4 + \dots \\
B \cdot C &= 1 + 3x^2 + 8x^4 + 12x^6 + \dots \\
f(x) = A \cdot B \cdot C &= 1 + 4x + 13x^2 + 32x^3 + 73x^4 + 148x^5 + 281x^6 + \dots
\end{aligned}$$

Also ist $f_6 = 281$.

Lösungen 11. Hausübung

Aufgabe 1

Die Gruppe D_n setzt sich zusammen aus n Drehungen, die die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ erzeugen und n Spiegelungen. Diese Spiegelungen sind für ungerades n Spiegelungen an Achsen durch einen Punkt und die Seitenmitte der gegenüberliegenden Seite - bestehen also stets aus einem Fixpunkt und $\frac{n-1}{2}$ Zweierzykeln. Für gerades n zerfallen sie in $\frac{n}{2}$ Spiegelungen an Achsen durch gegenüberliegenden Punkten - 2 Fixpunkte und $\frac{n-2}{2}$ Zykeln der Länge 2 - und in $\frac{n}{2}$ Spiegelungen an Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten. Diese bestehen aus $\frac{n}{2}$ Zweierzykeln. Mit der Formel für den Zykelindex von $\mathbb{Z}_n$ aus der Stundenübung folgt damit:

$$I_{D_n} = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} n x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n}{2} x_2^{\frac{n}{2}}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $n = 6$ folgt also:

$$I_{D_6} = \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_2^3 + 3x_1x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_6)$$

Durch die Polyasche Einsetzung von 2 für x_i erhält man die Gesamtzahl der Halskettentypen mit 6 Steinen in zwei verschiedenen Farben, also

$$I_{D_6}[x_i|2] = \frac{1}{12}(2^6 + 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = 13\ .$$

Aufgabe 2

Man betrachte einen Zykel von $\overline{\tau}$ der Länge k. Er sei erzeugt vom Paar (a_1, a_2). Dabei liege a_1 in einem Zykel der Länge i von τ und a_2 in einem Zykel der Länge j von τ.

Wegen $\overline{\tau}((a_1, a_2)) = (\tau(a_1), \tau(a_2))$ gilt dann $\overline{\tau}^k(a_1, a_2) = (\tau^k(a_1), \tau^k(a_2)) = (a_1, a_2)$, also $\tau^k(a_1) = a_1$ und $\tau^k(a_2) = a_2$. Es folgt, daß k das kleinste gemeinsame Vielfache von i und j sein muß.

Ein Zykel von $\overline{\tau}$ der Länge k wird also gerade von solchen Paaren (a_1, a_2) erzeugt, für die a_1 in einem Zykel von τ der Länge i und a_2 in einem Zykel von τ der Länge j liegt, wobei $[i, j] = k$ gilt. Wieviele solcher Paare gibt es? Da es b_i Zyklen der Länge i und b_j Zyklen der Länge j in τ gibt, existieren gerade $(b_i \cdot i) \cdot (b_j \cdot j)$ solcher Paare. Alle diese Paare erzeugen Zykeln der Länge $k = [i, j]$ und zwar gerade alle möglichen. Dabei erscheinen aber auch die Zyklen als verschieden, in denen die Paare nur zyklisch vertauscht sind. Da der Zykel von $\overline{\tau}$ die Länge k hat, sind von den $(b_i \cdot i) \cdot (b_j \cdot j)$ Zyklen jeweils $k = [i, j]$ identisch. Damit gibt es zu vorgegebenem $k = [i, j]$ gerade

$$\frac{b_i \cdot i \cdot b_j \cdot j}{k} = \frac{b_i \cdot b_j \cdot i \cdot j}{[i, j]} = b_i \cdot b_j \cdot (i, j)$$

verschiedene Zyklen der Länge $k = [i, j]$ (denn $[i, j] \cdot (i, j) = ij$).

Summation über alle $[i, j] = k$ liefert die Formel

$$p_k = \sum_{[i,j]=k} (i, j) b_i b_j\ .$$

Wertet man diese Formel aus, so folgt unabhängig von n:

$$\begin{aligned}
p_1 &= b_1^2 \\
p_2 &= 2b_1b_2 + 2b_2^2 \\
p_3 &= 2b_1b_3 + 3b_3^2 \\
p_4 &= 2b_1b_4 + 4b_2b_4 + 4b_4^2 \\
p_5 &= 2b_1b_5 + 5b_5^2
\end{aligned}$$

Für $n = 4$ starten wir mit dem Zykelindex der symmetrischen Gruppe S_4. Nach Vorlesung erhält man

$$I_{S_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \ .$$

Damit erzeugt man aus τ mit gegebenem I_τ jeweils Permutationen $\overline{\tau}$ mit Zykelindex $I_{\overline{\tau}}$ gemäß folgender Tabelle:

$$\begin{array}{ll}
I_\tau = x_1^4 & I_{\overline{\tau}} = x_1^{16} \\
I_\tau = x_1^2x_2 & I_{\overline{\tau}} = x_1^4x_2^6 \\
I_\tau = x_1x_3 & I_{\overline{\tau}} = x_1x_3^5 \\
I_\tau = x_2^2 & I_{\overline{\tau}} = x_2^8 \\
I_\tau = x_4 & I_{\overline{\tau}} = x_4^4
\end{array}$$

Der gesuchte Zykelindex lautet also

$$I_G = \frac{1}{24}(x_1^{16} + 6x_1^4x_2^6 + 8x_1x_3^5 + 3x_2^8 + 6x_4^4) \ .$$

Aufgabe 3

Direkte Abzählung:

Man setze zunächst Person 1. Anschließend können $n-1$ Personen auf $(n-1)!$ Arten gesetzt werden. Also ist die gesuchte Anzahl gleich $(n-1)!$.

Abzählung mit Lemma von Burnside:

Man betrachte die Menge P aller Sitzordnungen bei numerierten Plätzen. Es ist $|P| = n!$. Die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n$ induziert eine Permutationsgruppe G, die auf P operiert. Die Anzahl der Bahnen von G ist die gesuchte Anzahl. Bezeichnet man mit $f(g)$ die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation g, so gilt nach dem Lemma von Burnside

$$O(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g) = \frac{1}{n}(n! + 0 + 0 + \ldots + 0) \ ,$$

denn die Identität in G läßt alle Sitzordnungen fest, während ein $\sigma \in G$ mit $\sigma \neq id$ keine Sitzordnung fest läßt, also keine Fixpunkte besitzt.
Damit folgt auch auf diese Art $O(G) = (n-1)!$.

Aufgabe 4

Es sei $D = \{1, 2, \ldots, 16\}$ die Menge der Felder des Brettes.

Einseitiges Brett:

Man muß Bretter identifitzieren, die durch Drehung auseinander hervorgehen. T ist also diejenige Untergruppe von S_{16}, die von $\mathbb{Z}_4$ auf D erzeugt wird.

Die Identität von T besteht aus 16 Einerzykeln. 90°- und 270° Drehungen ergeben in T Permutationen mit 4 Zykeln der Länge 4. Die 180° Drehung ergibt eine Permutation mit 8 Zweierzykeln. Es folgt

$$I_T = \frac{1}{4}(x_1^{16} + x_2^8 + 2x_4^4) \ .$$

Die Polyasche Einsetzung liefert für die gesuchte Anzahl

$$I_T[x_i|2] = \frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 16456 \ .$$

Zweiseitiges Brett:
T ist die durch die Diedergruppe D_4 auf D induzierte Permutationsgruppe. Zusätzlich treten jetzt also Spiegelungen auf. Die Spiegelungen an Diagonalen des Quadrats ergeben Permutationen von D mit 4 Fixpunkten und 6 Zykeln der Länge 2. Die Spiegelungen an Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten liefern Permuatutionen mit 8 Zykeln der Länge 2. Also gilt hier

$$I_T = \frac{1}{8}(x_1^{16} + 2x_1^4 x_2^6 + 3x_2^8 + 2x_4^4) \ ,$$

und die Polyasche Einsetzung liefert als gesuchte Anzahl

$$I_T[x_i|2] = \frac{1}{8}(2^{16} + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 8548 \ .$$